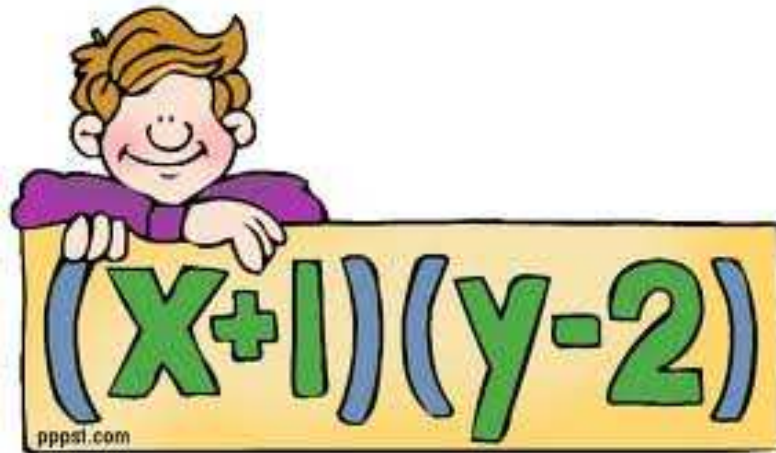


# Algebrai egész kifejezések (polinomok)



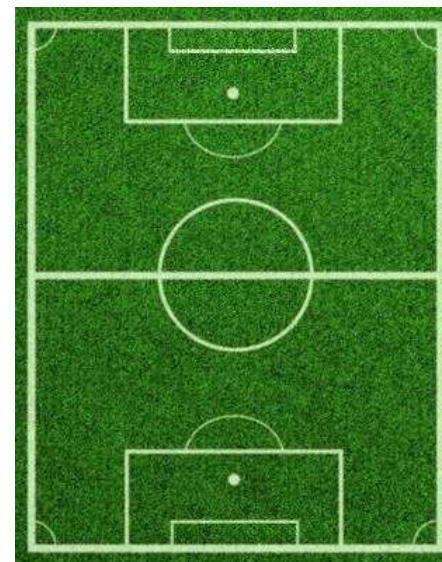
# Betűk használata a matematikában

## Feladat

Mekkora a 107m x 68m oldalhosszúságú téglalap alakú focipálya kerülete, területe?

$$a = 107 \text{ m}$$

$$b = 68 \text{ m}$$



## Terület

$$T = a \cdot b = 107\text{m} \cdot 68\text{m} = 7276\text{m}^2$$

## Kerület

$$K = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (107\text{m} + 68\text{m}) = 350\text{m}$$

# Az összeadás és a szorzás műveletének tulajdonságai

összeadás

szorzás

**kommutatív**

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**asszociatív**

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

A szorzás **disztributív** az összeadásra nézve.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot c + b \cdot c$$

Egy-egy matematikai probléma általánosítása esetén gyakran használunk betűket.

Ezt a problémától függően nevezhetjük **változó**nak, **határozatlannak** vagy **ismeretlennek**.

A betűs kifejezések használatakor minden esetben fontos megadnunk, hogy az általunk használt betűk mely számhalmaz elemeit helyettesítik.

Ez a számhalmaz az **alaphalmaz**.

# Algebrai kifejezés

Algebrai kifejezést kapunk, ha a benne szereplő mennyiségeket (számokat, betűket), illetve azok egész kitevőjű hatványait vagy gyökeit a négy alapművelet véges számú alkalmazásával kötünk össze.

**Például:**

$$3a^2b$$

$$2x^3 + 4xy$$

$$2x - 3y^2 + 5a^4$$

$$(2x - y)(3a^2 + 7b)$$

A betűket szorzó számokat együtthatónak nevezzük.

**Együttható**

**3**

**.**

**Változó**

**x**

A szorzás jelét általában nem tesszük ki:

$$3x = 3x ; \quad 6 \cdot a \cdot b = 6ab ; \quad a \cdot b \cdot c = abc$$

# Egyváltozós és többváltozós kifejezések

Egyváltozós kifejezésről beszélünk, ha abban csak egy betű szerepel.

$$\text{pl.: } 3x, \quad 16y + 1, \quad \frac{2}{3}a, \quad \frac{5b + 3}{11}$$

A több különböző betűt tartalmazó kifejezést többváltozós kifejezésnek nevezzük.

$$\text{pl.: } 6a + 7b, \quad 3x + 4xy + 5y, \quad 5yxz$$

# Algebrai egész kifejezés

Algebrai egész kifejezésről beszélünk akkor, ha az algebrai kifejezésben nincs tört, vagy az előforduló tört nevezőjében nincs változó.

$$\text{pl.: } 3x, \quad 16y + 1, \quad \frac{2}{3}a, \quad \frac{5b + 3}{11}$$



# Algebrai tört kifejezés

Algebrai törtkifejezésről beszélünk akkor, ha az algebrai kifejezésben előforduló tört nevezőjében van változó.

$$\text{pl.: } \frac{1}{x}, \frac{2x+1}{y}, \frac{x^2+3xy-5y^2}{xy}$$

Egy algebrai tört értelmezési tartományán a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát értjük, melynek elemeit a változó helyére beírva a kifejezésben szereplő műveletek elvégezhetőek.

# Egytagú kifejezés

Olyan algebrai kifejezések, melyekben a számokat és a számokat helyettesítő betűket, illetve azok pozitív egész kitevőjű hatványait csak a szorzás műveletével kötjük össze.

**Például:**

$$3a^2b$$

$$12x^3y^7$$

$$x^2$$

$$5ab^2c^3$$

# Fokszám

Egytagú kifejezések fokszáma a benne szereplő betűk kitevőinek összege.

## Például:

$3^2xy^4$	ötödfokú
$8x^3$	harmadfokú
$12a^2b^5$	nyolcadfokú
$15x$	elsőfokú
$9$	nulladfokú

# A polinom

A polinom egytagú algebrai kifejezések összege.

**Például:**

$$7x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 3x + 4$$

Azokat a tagokat, melyek csak együtthatóban térnek el egymástól, egynemű tagoknak nevezzük.

**Például:**

$$3x^2y \quad 5yx^2 \quad 8x^2y$$

A polinomban az egynemű tagokat összevonhatjuk.

# A polinom fokszáma

A polinomban szereplő legnagyobb fokszámú tag fokszámával egyenlő.

## Például:

másodfokú:  $3x^2 - 2x + 1;$   $3y^2 + a^2 + xy$

harmadfokú:  $6a^3 - 5xa + 2$   $5x^2y - 3x$

Csak egy betűt tartalmazó polinomok tagjait olyan sorrendben szoktuk írni, hogy a tagok fokszáma csökkenjen.

## Például:

$$7x^5 + 8x^3 - 4x^2 + x - 12$$

$$A P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

alakú kifejezés egyváltozós polinom, ahol

$x \in \mathbf{R}$ ,  $a_n, a_{n-1}, a_2, a_1, a_0$  valós számok a polinom együtthatói,  $a_n \neq 0$  és  $n \in \mathbf{N}^+$ .

$n$  a polinom fokszáma.

Algebrai törteknek, felírhatók két polinom hányadosaként, ahol a nevezőben lévő polinom legalább elsőfokú.

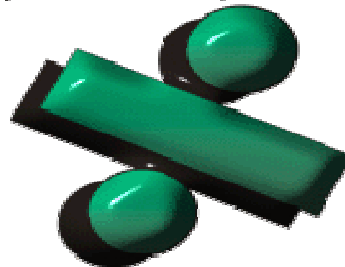
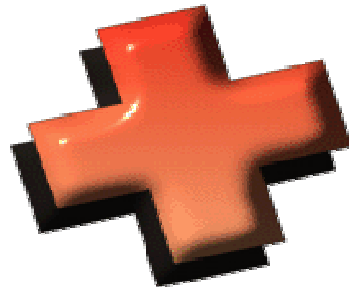
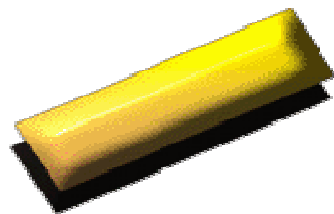
*(Nevezőben van betű.)*

$$\frac{x}{y}$$

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 3}$$

$$\frac{3xy - 5x + 6y}{4x + y}$$

# Műveletek polinomokkal





# Egynemű tagok összeadása, kivonása

Egynemű tagok között el lehet végezni az összevonást.

*(Az együtthatókat összevonjuk, és a kapott számot megszorozzuk a közös betűkifejezéssel.)*

**Például:**

$$4x^2y + 7x^2y - 5x^2y = 6x^2y$$

$$3a^3b + 6ab^2 - 5a^3b + 7a^3b - 7ab^2 = 5a^3b - ab^2$$

# Feladat:

$$\underline{5x^2y} + \underline{6x^2y} + \underline{xy^2} - \underline{2x^2y} - \underline{8xy^2} = \underline{9x^2y} - \underline{7xy^2}$$

*(célszerű az egynemű tagokat azonos módon aláhúzni.)*

$$\underline{4x^5} - \underline{3x^2} + \underline{2x^5} + \underline{6x^4} - \underline{x^2} - \underline{7x^5} + \underline{2} + \underline{3x^4} = (-x^5) + \underline{9x^4} - \underline{4x^2} + \underline{2}$$

$$3p^2q - 2p^2q^2 + 6pq^2 - (4p^2q + 3p^2q^2 - 5pq^2) =$$

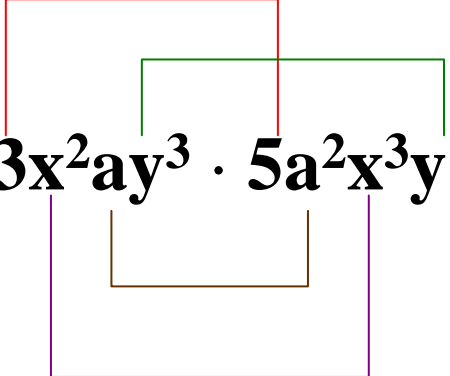
*(először a zárójelet kell felbontani; ha a zárójel előtt – jel van, akkor a zárójel elhagyásakor minden tag előjelét ellentétesre változtatjuk.)*

$$\underline{3p^2q} - \underline{2p^2q^2} + \underline{6pq^2} - \underline{4p^2q} - \underline{3p^2q^2} + \underline{5pq^2} = \underline{7p^2q} - \underline{5p^2q^2} + \underline{11pq^2}$$

# Egy tag szorzása egy taggal

Egy tagot egy taggal úgy szorzunk, hogy az együtthatókat összeszorozzuk, majd az azonos betűkkel is elvégezzük a szorzást.

**Például:**


$$3x^2ay^3 \cdot 5a^2x^3y = 15a^3x^5y^4$$

# Feladat:

$$5a^2b^3c \cdot 4a^3b^6c^4 = 5 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^6 \cdot c \cdot c^4 = 20a^5b^9c^5$$

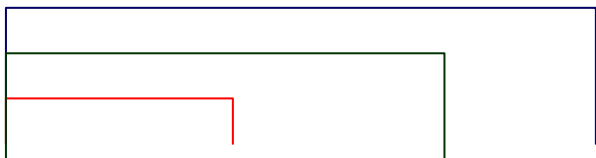
$$2x^3y^5z^4 \cdot \frac{3}{4}x^3y^6z = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot y^5 \cdot y^6 \cdot z^4 \cdot z = \frac{3}{2}x^6y^{11}z^5$$

$$\frac{5}{6}p^5q^2r^6 \cdot \frac{2}{3}p^2q^4r^7 = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot p^5 \cdot p^2 \cdot q^2 \cdot q^4 \cdot r^6 \cdot r^7 = \frac{5}{9}p^7q^6r^{13}$$

# Egy tag szorzása több taggal

Egy tagot több taggal úgy szorzunk, hogy az egy taggal a több tag minden tagját megszorozzuk.

**Például:**


$$3x^2y \cdot (2x^2y^2 - 5xy + xy^2) = 6x^4y^3 - 15x^3y^2 + 3x^3y^3$$

# Feladat:

$$a \cdot (3b - 2c) = 3ab - 2ac$$

$$2xy^2 \cdot (3x^2 - 4y + 6z^2) = 6x^3y^2 - 8xy^3 + 12xy^2z^2$$

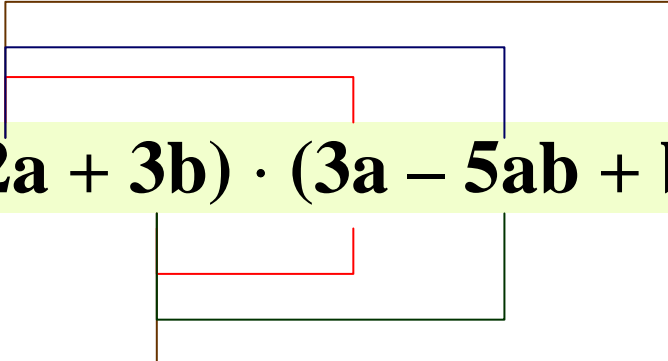
$$\frac{2}{3}k^2n \cdot \left( 4k - \frac{7}{5}n^3 + \frac{3}{2}km^2 \right) = \frac{8}{3}k^3n - \frac{14}{15}k^2n^4 + k^3m^2n$$

$$-\frac{5}{8}x^2y^3 \cdot \left( \frac{4}{15}xy - \frac{3}{5}x^3y^2 + \frac{1}{3}x^2y^2 \right) = -\frac{1}{6}x^3y^4 + \frac{3}{8}x^5y^5 - \frac{5}{24}x^4y^5$$

# Több tag szorzása több taggal

Több tagot több taggal úgy szorzunk, hogy az egyik többtagú összeg minden tagját a másik többtagú összeg minden tagjával megszorozzuk.

**Például:**


$$(2a + 3b) \cdot (3a - 5ab + b) = 6a^2 - 10a^2b + 2ab +$$
$$+ 9ba - 15 ab^2 + 3b^2 =$$

*összevonás után:*

$$6a^2 - 10a^2b + 11ab - 15 ab^2 + 3b^2$$

# Feladat:

$$(2a - b) \cdot (a - 3b) = 2a^2 - 6ab - ba + 3b^2 = 2a^2 - 7ab + 3b^2$$

$$(3xy - 4y^2) \cdot (5x^2 - 2y) = 15x^3y - 6xy^2 - 20y^2x^2 + 8y^3$$

$$(x^2 + 4xy - 3y^2) \cdot (2x - 5y) =$$

$$2x^3 - 5x^2y + 8x^2y - 20xy^2 - 6y^2x + 15y^3 = 2x^3 + 3x^2y - 26xy^2 + 15y^3$$

$$\left(4km^2 - \frac{2}{3}k^2n\right) \cdot \left(2kn - \frac{7}{5}n^3 + \frac{3}{2}km^2\right) =$$

$$8k^2m^2n - \frac{28}{5}km^2n^3 + 6k^2m^4 - \frac{4}{3}k^3n^2 + \frac{14}{15}k^2n^4 - k^3m^2n$$