

Algebrai törtek összevonása

Ha az összevonandó törtek nevezője megegyezik, akkor egyszerűen csak összevonjuk a számlálókat.

$$\frac{x+2}{y} + \frac{3x-7}{y} = \frac{(x+2) + (3x-7)}{y} = \frac{x+2+3x-7}{y} = \frac{4x-5}{y}$$

Figyelem! Ha a törtvonal előtt kivonás jel van, akkor összevonásnál a kivonandó számlálójában megváltozik a műveleti jel!

$$\frac{4x+4}{6x} - \frac{x-1}{6x} = \frac{(4x+4) - (x-1)}{6x} = \frac{4x+4-x+1}{6x} = \frac{3x+5}{6x}$$

$$\frac{b}{a+2} - \frac{5b+6}{a+2} = \frac{b - (5b+6)}{a+2} = \frac{b-5b-6}{a+2} = \frac{-4b-6}{a+2}$$

Ha az összevonandó törtek nevezője különböző, akkor először közös nevezőre hozzuk őket, majd ezután összevonjuk a számlálókat.

A közös nevező:

Legyen többszöröse mindegyik nevezőnek.

Legyen minél kisebb.

Azaz a legkisebb közös többszörös a legalkalmasabb.

Ha viszont ezt nehéz megtalálni, akkor biztosan jó lesz az összes nevező szorzata.

(Mert az minden nevezőnek többszöröse).

A nevező szorzat alakja segít a tört értelmezési tartományának megállapításában is.

Végezd el az alábbi műveleteket! ($x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{x+1}{x} + \frac{3x-2}{2x} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq 0$

A közös nevező legyen a $2x$.
Az első törtet bővítsük 2-vel.

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{x+1}{x} + \frac{3x-2}{2x} = \frac{2 \cdot (x+1) + (3x-2)}{2x} = \frac{2x+2+3x-2}{2x} = \frac{5x}{2x} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{2x+4}{5x} - \frac{3x-1}{x} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq 0$

A közös nevező legyen az $5x$.
Az második törtet bővítsük 5-tel.

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{2x+4}{5x} - \frac{3x-1}{x} = \frac{(2x+4) - 5 \cdot (3x-1)}{5x} = \frac{2x+4-15x+5}{5x} = \underline{\underline{\frac{-13x+9}{5x}}}$$

$$\frac{5x+1}{4x} - \frac{5x-3}{x+3} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq 0$, és $x \neq (-3)$

A közös nevező legyen a $4x \cdot (x+3)$.
Az első törtet bővítsük $(x+3)$ -mal.
Az második törtet bővítsük $4x$ -szel.

$$\frac{5x+1}{4x} - \frac{5x-3}{x+3} = \frac{(x+3) \cdot (5x+1) - 4x \cdot (x+3)}{4 \cdot x \cdot (x+3)} =$$
$$\frac{5x^2 + x + 15x + 3 - 4x^2 - 12x}{4x^2 + 12x} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 4x + 3}{4x^2 + 12x}}}$$

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{3-2x}{3x+9} + \frac{4x+1}{6x} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq 0$, és $x \neq (-3)$

Az első tört nevezőjéből emeljük ki 3-at.

A közös nevező legyen a $6 \cdot x \cdot (x+3)$.
Az első törtet bővítsük $2x$ -szel.
Az második törtet bővítsük $(x+3)$ -mal.

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{3-2x}{3x+9} + \frac{4x+1}{6x} = \frac{3-2x}{3 \cdot (x+3)} + \frac{4x+1}{6 \cdot x} = \frac{2 \cdot x \cdot (3-2x) + (x+3) \cdot (4x+1)}{6 \cdot x \cdot (x+3)} =$$

$$\frac{6x - 4x^2 + 4x^2 + x + 12x + 3}{6x^2 + 18x} = \frac{19x + 3}{6x^2 + 18x}$$

$$\frac{1+3x}{2x+8} - \frac{2x-3}{3x-6} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq (-4)$, és $x \neq 2$

Az első tört nevezőjéből emeljük ki 2-t,
a másodikéből 3-at.

A közös nevező legyen a $6 \cdot (x+4) \cdot (x-2)$.
Az első törtet bővítsük $3 \cdot (x-2)$ -vel.
Az második törtet bővítsük $2 \cdot (x+4)$ -gyel.

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{1+3x}{2x+8} - \frac{2x-3}{3x-6} = \frac{1+3x}{2 \cdot (x+4)} - \frac{2x-3}{3 \cdot (x-2)} =$$

$$\frac{3 \cdot (x-2) \cdot (1+3x) - 2 \cdot (x+4) \cdot (2x-3)}{2 \cdot 3 \cdot (x+4) \cdot (x-2)} = \frac{3 \cdot (x + 3x^2 - 2 - 6x) - 2 \cdot (2x^2 - 3x + 8x - 12)}{6 \cdot (x^2 - 2x + 4x - 8)} =$$

$$\frac{3x + 9x^2 - 6 - 18x - 4x^2 - 6x + 16x - 24}{6x^2 - 12x + 24x - 48} = \frac{5x^2 - 5x - 30}{6x^2 - 12x - 48}$$

$$\frac{2x+3}{x^2-9} + \frac{4-x}{x+3} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq \pm 3$

Vegyük észre, hogy az első tört nevezőjében az $x^2 - 9$ felírható $(x+3) \cdot (x-3)$ alakban.

$$\frac{2x+3}{x^2-9} + \frac{4-x}{x+3} = \frac{2x+3}{(x+3) \cdot (x-3)} + \frac{4-x}{x+3} =$$

A közös nevező legyen az $(x+3) \cdot (x-3)$.
Az első törtet bővítsük $(x+3)$ -mal
Az második törtet bővítsük $(x-3)$ -mal.

$$\frac{2x+3+(x-3) \cdot (4-x)}{(x+3) \cdot (x-3)} = \frac{2x+3+4x-x^2-12+3x}{x^2-9} = \frac{-x^2+9x-9}{x^2-9}$$

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x^2-5x}{2x^2-8} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq \pm 2$

Az második tört nevezőjéből emeljük ki 2-t.

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x^2-5x}{2x^2-8} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{x^2-5x}{2 \cdot (x^2-4)} =$$

A közös nevező legyen a $2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)$.
Az első törtet bővítsük $2 \cdot (x+2)$ -vel

$$\frac{2 \cdot (x+2) \cdot (x+2) - (x^2-5x)}{2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)} = \frac{2 \cdot (x^2+4x+4) - x^2+5x}{2x^2-8} =$$

$$\frac{2x^2+8x+8-x^2+5x}{2x^2-8} = \frac{x^2+13x+8}{2x^2-8}$$

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{3x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 1} - \frac{5x - 3}{x - 1} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq 1$

Vegyük észre, hogy az első tört nevezője egy teljes négyzet: $(x - 1)^2$.

A közös nevező legyen az $(x-1)^2$.
Az második törtet bővítsük $(x-1)$ -gyel.

$$\frac{3x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 1} - \frac{5x - 3}{x - 1} = \frac{3x^2 - 4x + 7}{(x - 1)^2} - \frac{5x - 3}{x - 1} =$$

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{3x^2 - 4x + 7 - (x - 1) \cdot (5x - 3)}{(x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 7 - (5x^2 - 3x - 5x + 3)}{(x - 1)^2} =$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 7 - 5x^2 + 3x + 5x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + 4}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{3x + 2}{x^2 - 9} =$$

Megoldás:

Kikötés: $x \neq \pm 3$

Vegyük észre, hogy az első tört nevezője egy teljes négyzet: $(x + 3)^2$,
a második tört nevezőjében az $x^2 - 9$ felírható $(x + 3) \cdot (x - 3)$ alakban.

A közös nevező legyen a $(x+3) \cdot (x+3) \cdot (x-3)$.
Az első törtet bővítsük $(x-3)$ -mal.
A második törtet bővítsük $(x+3)$ -mal.

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{3x + 2}{x^2 - 9} = \frac{2x - 1}{(x + 3)^2} + \frac{3x + 2}{(x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

$$\frac{(x - 3) \cdot (2x - 1) + (x + 3) \cdot (3x + 2)}{(x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)} =$$

Bontsuk fel a zárójele(ke)t.
Vonjunk össze!

$$\frac{2x^2 - x - 6x + 3 + 3x^2 + 2x + 9x + 6}{x^3 + 3x^2 - 9x - 27} = \frac{5x^2 + 4x + 9}{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}$$