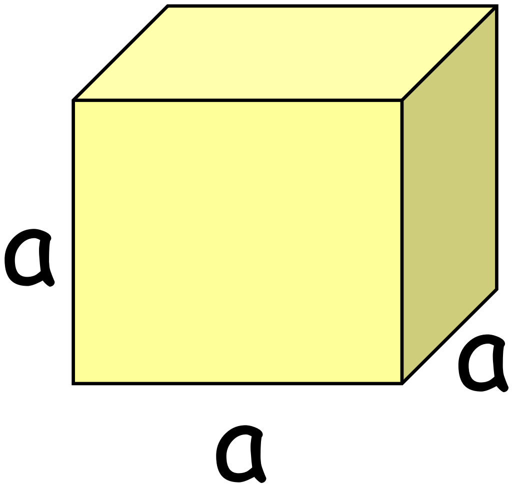
Hatványozás

Egy kocka oldalainak hossza, és a magassága egyaránt 5 cm.

Határozzuk meg az alapterületét és a térfogatát!



Alapterület:

$$T = a \cdot a = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2$$

Térfogat:

$$V = a \cdot a \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \text{ cm}^3$$

$a = 5\text{cm}$

Azonos tényezőkből álló szorzatot rövidebben is jelölhetjük:

$$\mathbf{a \cdot a = a^2 \quad a \cdot a \cdot a = a^3}$$

Elnevezés:

Hatvány:

$$5^3$$

Hatvány alap

Hatvány kitevő

Def.: Jelöljön **a** egy tetszőleges számot, **n** pedig legyen pozitív egész szám.

Ekkor **a** **n**-edik **hatvány**ának nevezzük azt az **n** tényezős szorzatot,

melynek minden tényezője **a**.

Jele: $$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$$

Bármely szám nulladik hatványa 1 $a^0 = 1$

0^0 **nincs értelmezve**

Bármely szám első hatványa önmaga $a^1 = a$

Példák:

$11^0 = 1$

$9^1 = 9$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$2^8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$

$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$

$10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000000$

Ha az alap 1-nél nagyobb, akkor a hatványozás eredménye nagyobb az alapnál.

Ha az alap 1-nél kisebb, de nullánál nagyobb, akkor a hatványozás eredménye kisebb az alapnál.

Negatív alap esetén a hatványozás eredménye negatív, ha a kitevő páratlan, mert páratlan számú negatív tényező szorzata negatív.
A hatványozás eredménye pozitív, ha a kitevő páros szám.

Hatványozás azonosságai

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Azonos alapú, pozitív egész kitevőjű hatványok szorzata

Tétel: Azonos alapú, pozitív egész kitevőjű hatványok szorzata egy olyan hatvány, amelyben az azonos alap kitevője a tényezőhatványok kitevőinek összege.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$n, m \in \mathbf{Z}, \; a \in \mathbf{R}$

Legyen **n** és **m** pozitív egész. Bármely **a** valós számra:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ tényező}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ tényező}}}_{n\,+\,m \text{ tényező}} = a^{n+m}$$

Példák:

$$3^5 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{5+4} = 3^9$$

$$2^7 \cdot 2^{11} = 2^{7+11} = 2^{18}$$

$$7^3 \cdot 7^9 = 2^{3+9} = 2^{12}$$

$$11^5 \cdot 11^{13} = 2^{5+13} = 2^{18}$$

$$2^8 \cdot 2^0 = 2^{8+0} = 2^8$$

$$5^9 \cdot 5 = 2^{9+1} = 2^{10}$$

$$8^6 \cdot 8^6 = 2^{6+6} = 2^{12}$$

Azonos alapú, pozitív egész kitevőjű hatványok hányadosa

Tétel: Két azonos alapú hatvány hányadosa egyenlő az azonos alap olyan hatványával, ahol a kitevő a számláló és a nevező kitevőjének a különbsége.

Ha a számláló kitevője nagyobb a nevező kitevőjénél, akkor ez pozitív egész kitevőjű hatvány.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$n, m \in \mathbf{Z},\ a \in \mathbf{R}$

$a \neq \mathbf{0}$

Legyen **n** és **m** pozitív egész ($n \geq m$).

Bármely **a** valós számra ($a \neq 0$):

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{n tényező}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m tényező}}} = a^{n-m}$$

Példák:

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{2^9}{2^4} = 2^{9-4} = 2^5$$

$$\frac{5^{11}}{5^8} = 5^{11\text{-}5} = 5^6$$

$$\frac{6^{13}}{6^6} = 6^{13-6} = 6^7$$

$$\frac{7^{10}}{7} = 7^{10-1} = 7^9$$

$$\frac{9^7}{9^0} = 9^{7-0} = 9^7$$

$$\frac{4^9}{4^9} = 4^{9-9} = 4^0 = 1$$

Legyen **n** és **m** pozitív egész (n < m).
Bármely **a** valós számra (a≠0):

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{3^4}{3^7} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3} = 3^{4-7} = 3^{-3}\left(=\frac{1}{3^3}\right)$$

$n \in Z$
$a \neq 0$

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

$$\boxed{a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}}}$$

Egymás reciprokai

<u>Tétel:</u> Egy pozitív egész kitevőjű hatvány felírható úgy is, mint az ellentett kitevőjű hatvány reciproka.

$a \in R, \quad a \neq 0$
$n \in Z$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$a^{n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^{-n}}$$

Hatvány hatványozása egész kitevővel

<u>Tétel:</u> Pozitív egész kitevőjű hatvány pozitív egész kitevőjű hatványa egyenlő az alapnak a kitevők szorzatára emelt hatványával.

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n\cdot m}$$

$n, m \in \mathbf{Z},\ a \in \mathbf{R}$

$a \neq \mathbf{0}$

Legyen **n** és **m** pozitív egész. Bármely **a** valós számra:

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}$$

$$\left(a^{n}\right)^{m} = \overbrace{\left(a^{n}\right) \cdot \left(a^{n}\right) \cdot \left(a^{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a^{n}\right)}^{\text{m tényező}} =$$

$$= \underbrace{\left(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\right) \cdot \left(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\right) \cdot \ldots \cdot \left(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\right)}_{\text{n·m tényező}} = a^{n \cdot m}$$

Példák:

$$\left(3^5\right)^3 = 3^{5\cdot 3} = 3^{15}$$

$$\left(5^8\right)^9 = 5^{8\cdot 9} = 5^{72}$$

$$\left(7^2\right)^9 = 7^{2\cdot 9} = 7^{18}$$

$$\left(8^4\right)^7 = 8^{4\cdot 7} = 8^{28}$$

$$\left(11^1\right)^3 = 11^{1\cdot 3} = 11^3$$

$$\left(9^4\right)^0 = 9^{4\cdot 0} = 9^0$$

Azonos egész kitevőjű hatványok szorzata

<u>Tétel:</u> két szám közös egész kitevőjű hatványának szorzata egyenlő az alapok szorzatának a közös kitevőre emelt hatványával. Ha a kitevő negatív, akkor a és b egyike sem lehet nulla.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a, b \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}$$

Példák:

$$3^4 \cdot 7^4 = (3 \cdot 7)^4 = 21^4$$

$$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6$$

$$4^{-5} \cdot 6^{-5} = \frac{1}{4^5} \cdot \frac{1}{6^5} = \frac{1}{4^5 \cdot 6^5} = \frac{1}{(4 \cdot 6)^5} = \frac{1}{24^5} = 24^{-5}$$

$$3^{-7} \cdot 7^{-7} = 21^{-7}$$

Azonos egész kitevőjű hatványok hányadosa

<u>Tétel:</u> Két közös pozitív egész kitevőjű hatvány hányadosa egyenlő az alapok hányadosának a közös kitevőre emelt hatványával.
Ha n negatív, akkor a ≠ 0 és b ≠ 0 feltételek mellett igaz az állítás.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$a, b \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}$
$b \neq \mathbf{0}$

Példák:

$$\frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\frac{3^5}{7^5} = \left(\frac{3}{7}\right)^5$$

$$\frac{4^3}{12^3} = \left(\frac{4}{12}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\frac{7^4}{2^4} = \left(\frac{7}{2}\right)^4$$