Kombinatorika

Ismétléses és ismétlés nélküli permutáció (sorbarendezés)

Ismétlés nélküli permutáció

$$P_n = n!$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Ismétléses permutáció

$$P_n^{(n_1;n_2;\ldots n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Ismétléses és ismétlés nélküli variáció

Ismétlés nélküli variáció

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Ismétléses variáció

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Ismétléses és ismétlés nélküli kombináció (kiválasztás)

Ismétlés nélküli kombináció

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Ismétléses kombináció

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ismétléses és ismétlés nélküli permutáció (sorbarendezés)

az összes dolgot sorba rakjuk

Legyen adott n elem, melyeket minden lehetséges sorrendben elrendezünk. A kombinatorika nyelvén ekkor azt mondjuk, hogy ezeket az elemeket permutáltuk.

Ismétlés nélküli permutáció

Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé 5 ember?

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

Hányféleképpen lehet sorba rakni n különböző dolgot?

$P=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n=n!$

Ha a sorbarendezendő elemek mind különbözők, akkor ismétlés nélküli permutációról beszélünk.

n különböző elem ($n \in Z^+$) összes lehetséges ismétlés nélküli sorrendjeinek száma
$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Jele: P_n

$P_n = n!$

Ismétléses permutáció

Hányféleképpen lehet sorba rakni 2 kék és 3 piros golyót?

$$\frac{5!}{2!\,3!}=\frac{120}{2\cdot 6}=10$$

Hányféleképpen lehet sorba rakni n dolgot, ha köztük n_1, n_2, ..., n_k darab egyforma van? ($n_1+n_2+\ldots+n_k=n$)

$$P=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

Ha a sorbarendezendő elemek között egyformák is vannak, akkor ismétléses permutációról beszélünk.

Ha n elem között k különböző elem van ($n \in Z^+$, $k \in Z^+$) közöttük pedig n_1, n_2, ..., n_k ($n_1 \in Z^+$, $n_2 \in Z^+$, … $n_k \in Z^+$) darab egyforma, és $n_1 + n_2 + . + n_k = n$, akkor ezen n elem összes lehetséges sorrendjének száma: $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$

Az ilyen elrendezéseket az n elem ismétléses permutációjának nevezzük.

Jele: $P_n^{(n_1;n_2;\ldots n_k)}$

Ismétléses és ismétlés nélküli variáció

válasszunk néhányat a dolgok közül és rakjuk sorba őket

Ismétlés nélküli variáció

Egy 10 csapatos bajnokságban hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?

$$V = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Amikor n különböző elemből k darabot ($n \in Z^+$, $k \in Z^+$ és $k \leq n$) választunk ki úgy, hogy számít a kiválasztás sorrendje, és minden elemet csak egyszer választunk ki, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját képezzük.

Jele: V_n^k

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Ismétléses variáció

Hány TOTÓ- szelvényt vegyünk, hogy biztosan legyen egy telitalálatunk? (a 3 lehetséges végeredményből (1, 2, x) képezünk 14 (13+1) hosszúságú sorozatokat)

$3^{14}=4782969$

Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk?

$V=n^k$

Ha n elem k-ad osztályú variációinak képzésekor ($n \in Z^+$, $k \in Z^+$) megengedjük, hogy ugyanaz az elem akárhányszor szerepeljen, akkor k-ad osztályú ismétléses variációról beszélünk.

Jele: $V_n^{k,i}$

$$V_n^{k,i} = n^k$$

Ha minden elem akárhányszor szerepelhet, akkor a k skatulya mindegyikébe n-féle elem kerülhet, vagyis n-féleképpen választhatunk k-szor.

Ez összesen $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

Ismétléses és ismétlés nélküli kombináció (kiválasztás)

válasszunk néhányat a dolgok közül (nem számít a sorrend)

Ismétlés nélküli kombináció

Hány LOTTÓ- szelvényt vegyünk, hogy biztosan legyen egy telitalálatunk? (90 számból választunk ötöt, nem számít a kiválasztás sorrendje)

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = 43949268$$

Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és mindegyiket csak egyszer választhatjuk?

$$C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ha n különböző elem közül minden lehetséges módon kiválasztunk k elemet, az elemek sorrendjére való tekintet nélkül, akkor azt mondjuk, hogy n elem k-ad osztályú kombinációját kapjuk. Ha kikötjük, hogy ugyanaz az elem csak egyszer szerepelhet a kiválasztásban, akkor ismétlés nélküli kombinációkat kapunk ($n \in Z^+$, $k \in Z^+$ és $k \leq n$).

Jele: C_n^k

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Ismétléses kombináció

(NEM érettségi anyag!)

A lottóhúzásnál minden alkalommal visszateszem a kihúzott golyót, így egy szám többször is szerepelhet.

Hányféleképpen lehet n különböző dologból kiválasztani k darabot, ha nem számít a kiválasztás sorrendje és egy dolgot többször is választhatunk?

Ha n különböző elem közül minden lehetséges módon kiválasztunk k elemet, az elemek sorrendjére való tekintet nélkül, akkor azt mondjuk, hogy n elem k-ad osztályú kombinációját kapjuk. Ha ugyanaz az elem akárhányszor szerepelhet a kiválasztásban, akkor ismétléses kombinációkat kapunk ($n \in Z^+$, $k \in Z^+$ és $k \leq n$).

Jele: $C_n^{k,i}$

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$