

Másodfokú egyenletek

Az olyan egyenleteket, amelyben egy ismeretlen (változó) szerepel és legmagasabb hatványkitevője kettő, másodfokú egyismeretlenes egyenletnek nevezzük.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános, nullára rendezett alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ahol $a, b, c, x \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$.

Algebrai megoldása:

Az egyenletet mindig $ax^2 + bx + c = 0$ alakra hozzuk, majd az együtthatókat behelyettesítjük a megoldóképletbe:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Példa másodfokú egyenlet megoldására:

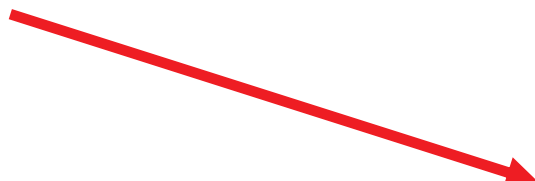
$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$



$$a = 3$$



$$b = -5$$



$$c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ellenőrzés:

$$x_1 = 2$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 0$$

$$12 - 10 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$$

$$\frac{6}{3} - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet diszkriminánsa

Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c, x \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$) egyismeretlenes másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$.

Az egyenletnek

- két valós gyöke van, ha a $\mathbf{d > 0}$, és $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- egy valós gyöke van, ha a $\mathbf{d = 0}$, és $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- nincs valós gyöke, ha $\mathbf{D < 0}$.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c, x \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$) egyismeretlenes másodfokú egyenletnek létezzenek valós gyökei, melyek nem feltétlenül különbözők. Legyenek ezek x_1 és x_2 . Ekkor a polinom felírható az $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ alakban, melyet a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának nevezünk.

Speciális másodfokú egyenletek megoldása

Tiszta másodfokú egyenlet

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyismeretlenes másodfokú egyenletben $b = 0$, $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor az egyenletet tiszta másodfokú egyenletnek nevezzük.

Az $ax^2 + c = 0$ egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, ahol $-\frac{c}{a} \geq 0$

Bizonyítás:

$$ax^2 + c = 0 \quad / -c$$

$$ax^2 = -c \quad /: a$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{és} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Hiányos másodfokú egyenlet

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyismeretlenes másodfokú egyenletben $c = 0$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenletet hiányos másodfokú egyenletnek nevezzük.

Az $ax^2 + bx = 0$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

Bizonyítás:

$$ax^2 + bx = 0 \quad / \text{ emeljük ki } x\text{-et}$$

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

egy szorzat akkor 0, ha az egyik tényezője 0, ahonnan

$$x_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad ax + b = 0 \quad / -b$$

$$ax = -b \quad / : a$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$