Másodfokú egyenletek

Az olyan egyenleteket, amelyben egy ismeretlen (változó) szerepel és legmagasabb hatványkitevője kettő, másodfokú egyismeretlenes egyenletnek nevezzük.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános, nullára rendezett alakja:

$$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$$

ahol a, b, c, $x \in \mathbf{R}$, és $a \neq 0$.

Algebrai megoldása:

Az egyenletet mindig $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ alakra hozzuk, majd az együtthatókat behelyettesítjük a megoldóképletbe:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Példa másodfokú egyenlet megoldására:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$a = 3 \qquad b = -5 \qquad c = -2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ellenőrzés:

$x_1 = 2$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 0$

$12 - 10 - 2 = 0$

$0 = 0$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 2 = 0$$

$$\frac{6}{3} - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet diszkriminánsa

Az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ (a, b, c, x $\in$ **R**, és a $\neq$ 0) egyismeretlenes másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$.

Az egyenletnek

- két valós gyöke van, ha a $\mathbf{d > 0}$, és $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- egy valós gyöke van, ha a $\mathbf{d = 0}$, és $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- nincs valós gyöke, ha $\mathbf{D < 0.}$

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

Az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ (a, b, c, x $\in$ $\mathbf{R}$, és a $\neq$ 0) egyismeretlenes másodfokú egyenletnek létezzenek valós gyökei, melyek nem feltétlenül különbözők. Legyenek ezek x1 és x2. Ekkor a polinom felírható az $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ alakban, melyet a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának nevezünk.

Speciális másodfokú egyenletek megoldása

Tiszta másodfokú egyenlet

Ha az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ egyismeretlenes másodfokú egyenletben b = 0, a ≠ 0 és c ≠ 0, akkor az egyenletet tiszta másodfokú egyenletnek nevezzük.

Az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{c} = 0$ egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, ahol $-\frac{c}{a} \geq 0$

Bizonyítás:

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{c} = 0 \qquad / -\mathrm{c}$$

$$\mathrm{a}x^2 = -\mathrm{c} \qquad /: \mathrm{a}$$

$$\mathrm{x}^2 = -\frac{c}{a} \qquad / \sqrt{}$$

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{és} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Hiányos másodfokú egyenlet

Ha az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ egyismeretlenes másodfokú egyenletben c = 0, a ≠ 0 és b ≠ 0, akkor az egyenletet hiányos másodfokú egyenletnek nevezzük.

Az $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{bx} = 0$egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$

Bizonyítás:

$ax^2 + bx = 0$ / emeljünk ki x-et

$x\cdot(ax + b) = 0$

egy szorzat akkor 0, ha az egyik tényezője 0, ahonnan

$x_1 = 0$ vagy $ax + b = 0$ /– b

$ax = -b$ /: a

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$