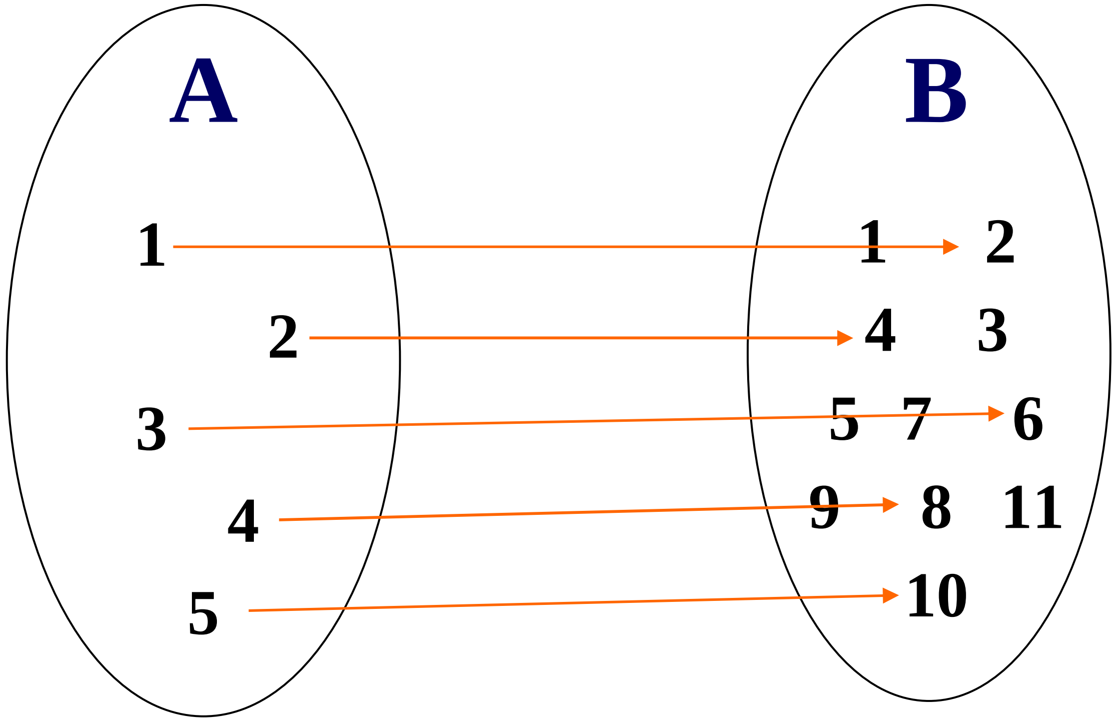
Nevezetes függvények

Függvények értelmezése

Legyen adott az A és B két nem üres halmaz. Az A halmaz minden egyes eleméhez rendeljük hozzá a B halmaz egy-egy elemét. Ez a hozzárendelés egyértelmű, és ezt a hozzárendelést az A halmazon értelmezett függvénynek nevezzük.



Az A halmaz a függvény **értelmezési tartomány**a.

A B halmaz a képhalmaz. A B halmaz azon elemei, amelyeket az A halmazhoz rendeltünk alkotják a függvény **értékkészlet**ét.

Az A halmazbeli elemeket **ősök**nek, a B halmazbeli elemeket **képek**nek is mondjuk.

Azokat a hozzárendeléseket, amelyeknél minden A halmazbeli elemnek pontosan egy képe van, és minden értékkészletbeli elemnek pontosan egy őse van **kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés**nek (**kölcsönösen egyértelmű függvény**nek) nevezzük.

Függvények megadása

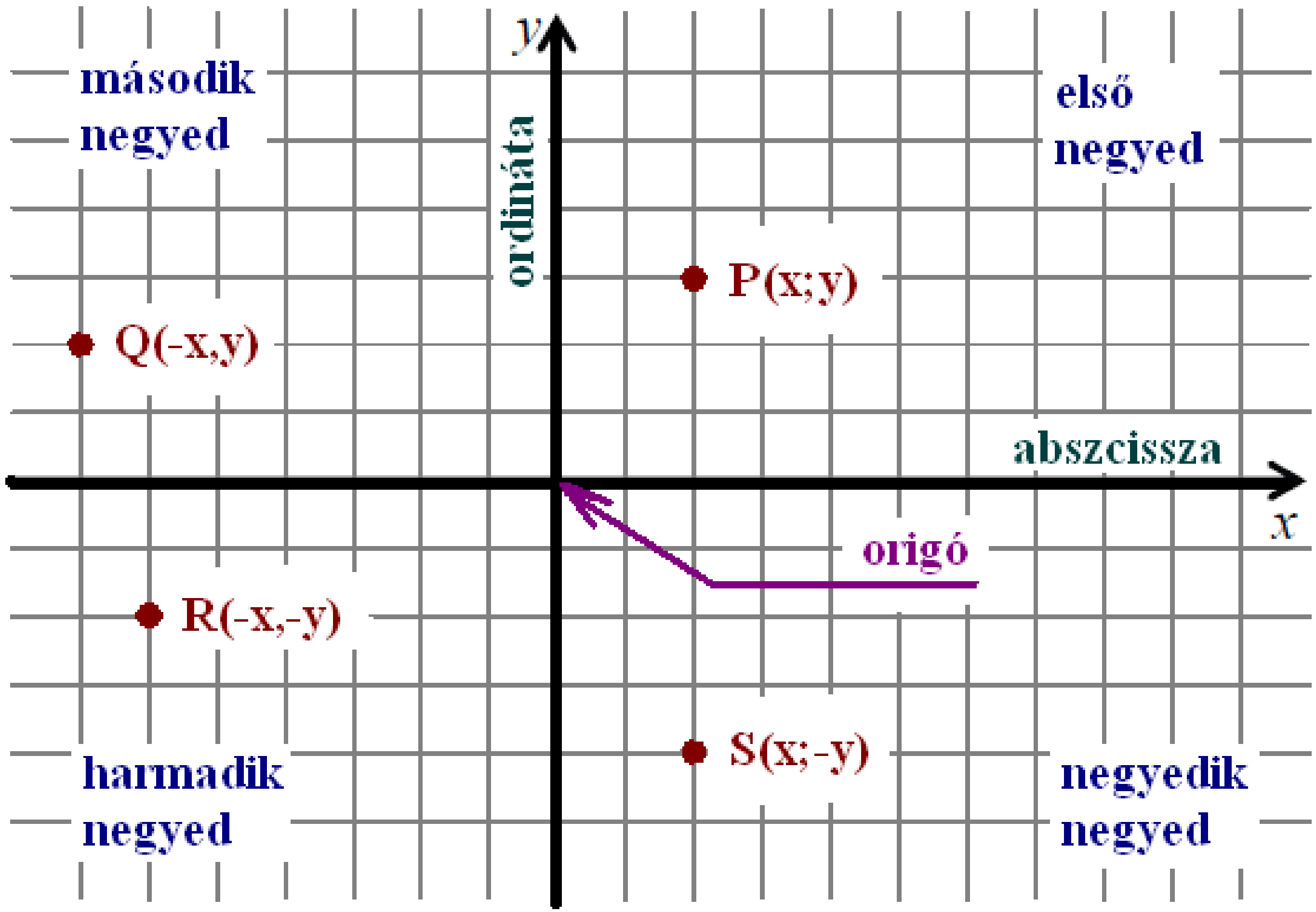
A függvények jelölésére általában az *f*, *g*, *h*, *i*, *j* stb. betűket használjuk.

A függvények megadásánál először az értelmezési tartományt adjuk meg, majd azt az egyértelmű utasítást, amely alapján hozzárendeljük az értelmezési tartomány elemeihez a képhalmaz elemeit.

Ezt az utasítást nevezzük a **függvény hozzárendelési szabályának**.

Függvények ábrázolása

A függvények ábrázolása **Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer**ben történhet.



Függvények szemléltetése

Legyen f: A $\rightarrow$ B függvény, és A, B a valós számok halmazának egy részhalmaza. Ekkor az ***f* függvény grafikonján** vagy **képén** azon pontok halmazát értjük a derékszögű koordináta rendszerben, amely pontok **első koordinátája** az A halmaz eleme: **(x)**, a **második koordinátája** pedig az x-hez tartozó függvényérték: ***f*(x).**

Lineáris függvény

Az $\boldsymbol{f}\mathbf{(x) = mx + b}$ alakú függvényeket, ahol

$\mathbf{m \neq 0}$, $\mathbf{m, b \in R}$ **elsőfokú függvény**eknek nevezzük.

Az $f(x) = mx + b$ képletben

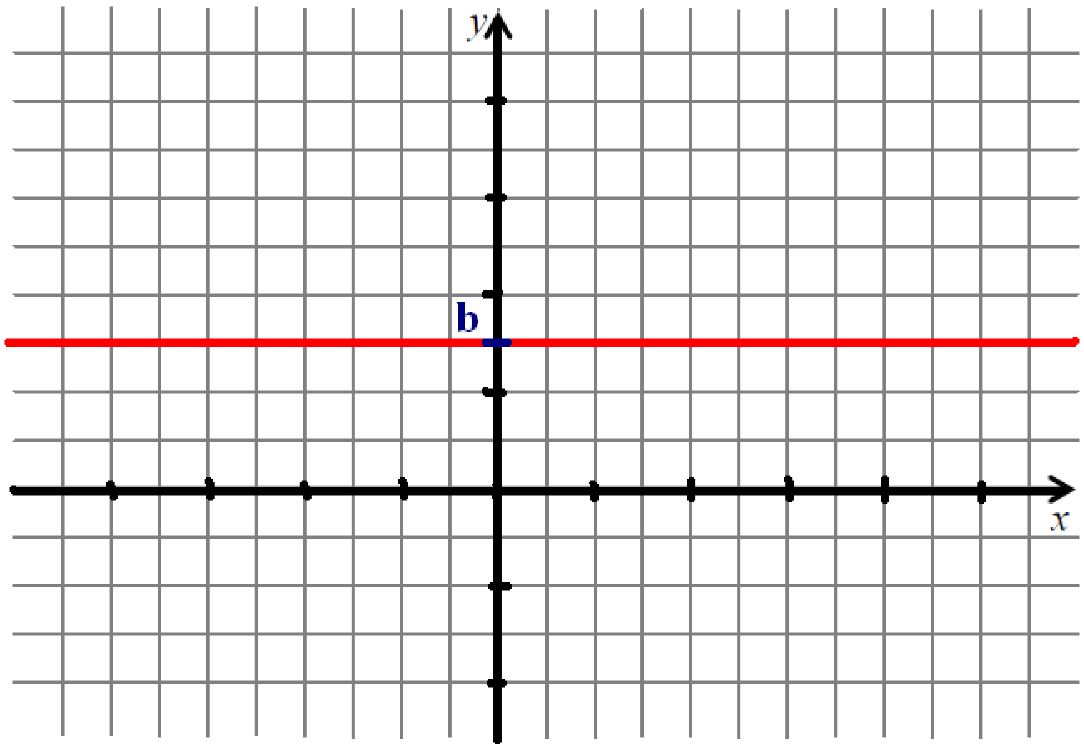
- a **b** megmutatja, hogy a függvény hol metszi az y tengelyt
- az **m** (meredekség) megmutatja, hogy az előbb kapott pontból jobbra lépve egy egységet hány (m) egységet lépjünk fölfele ($m > 0$), vagy lefele ($m < 0$).

Példák

lineáris függvényekre

Konstans b függvény

***f*(x) = b**



Függvényvizsgálat: ***f*(x):**

É.T.: $x \in \mathbf{R}$

É.K.: $y = b$

ZH: - vagy $f(x) = 0$ esetén minden $x \in \mathbf{R}$

szélső érték: min: -

max: -

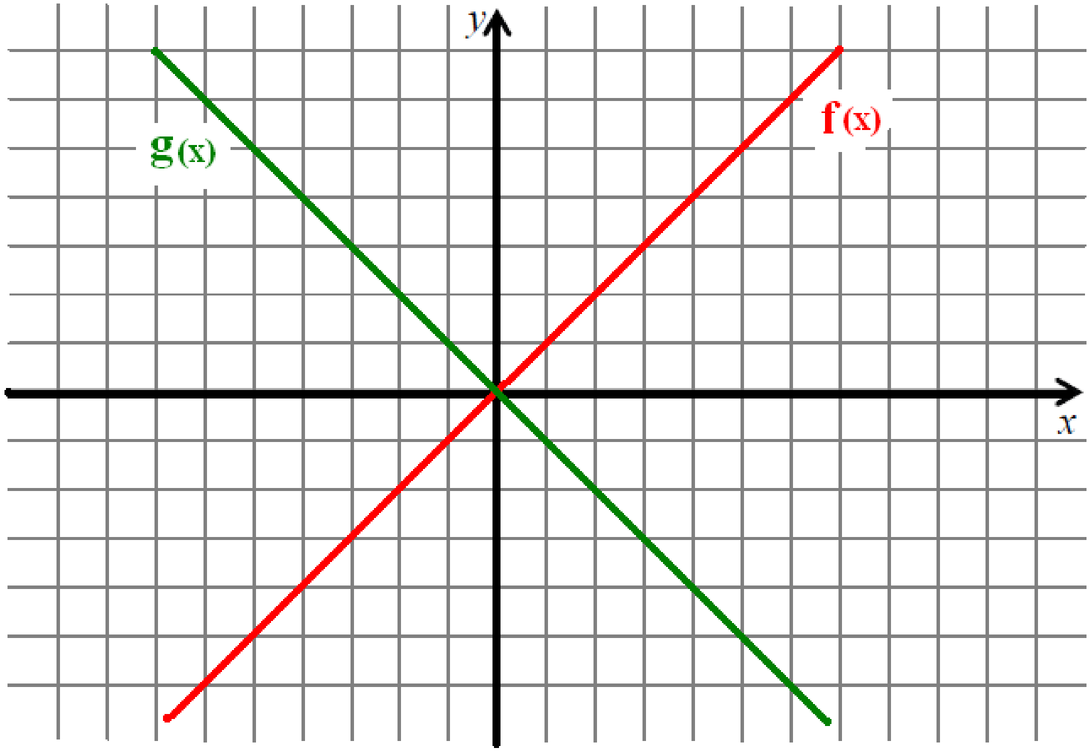
szig monoton cs.: -

szig. monoton nő: -

folytonos; páros

$f(x) = x$

$g(x) = -x$

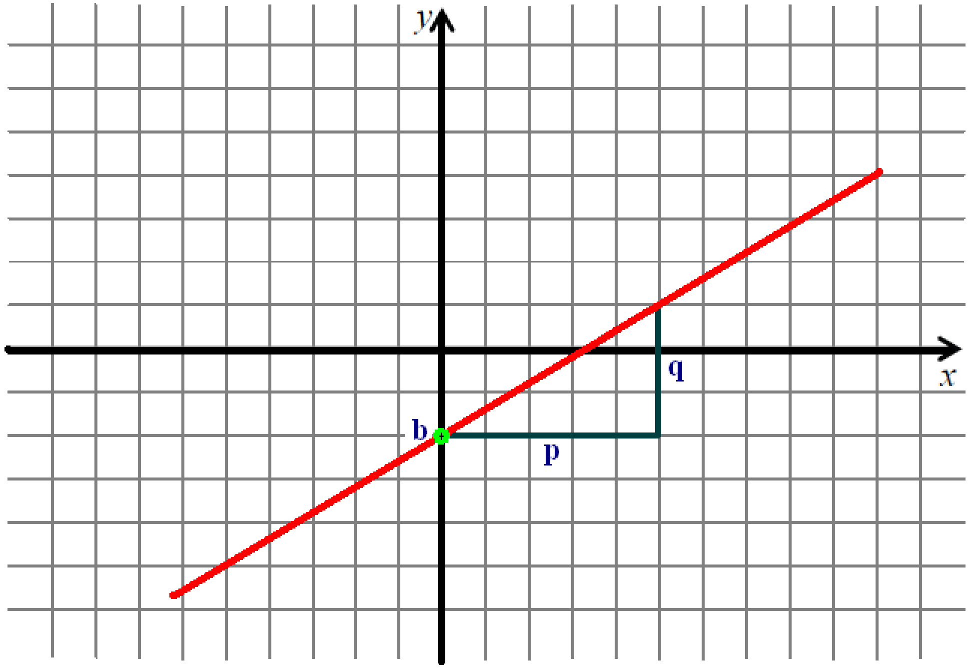


Függvényvizsgálat:

$f(x)$:	É.T.:	$x \in \mathbf{R}$
	É.K.:	$y \in \mathbf{R}$
	ZH:	$x = 0$
	szélső érték: min:	-
	max:	-
	szig monoton cs.:	-
	szig. monoton nő:	$]-\infty; \infty[$
	folytonos; páratlan	

$g(x)$:	É.T.:	$x \in \mathbf{R}$
	É.K.:	$y \in \mathbf{R}$
	ZH:	$x = 0$
	szélső érték: min:	-
	max:	-
	szig monoton cs.:	$]-\infty; \infty[$
	szig. monoton nő:	-
	folytonos; páratlan	

$$f(x) = \frac{p}{q} x + b$$



Függvényvizsgálat:

***f*(x):**

É.T.:	$x \in \mathbf{R}$
É.K.:	$y \in \mathbf{R}$
ZH:	$x = -\frac{b \cdot q}{p}$
szélső érték: min:	-
max:	-
szig monoton cs.:	-
szig. monoton nő:	] - ∞; ∞ [
folytonos	

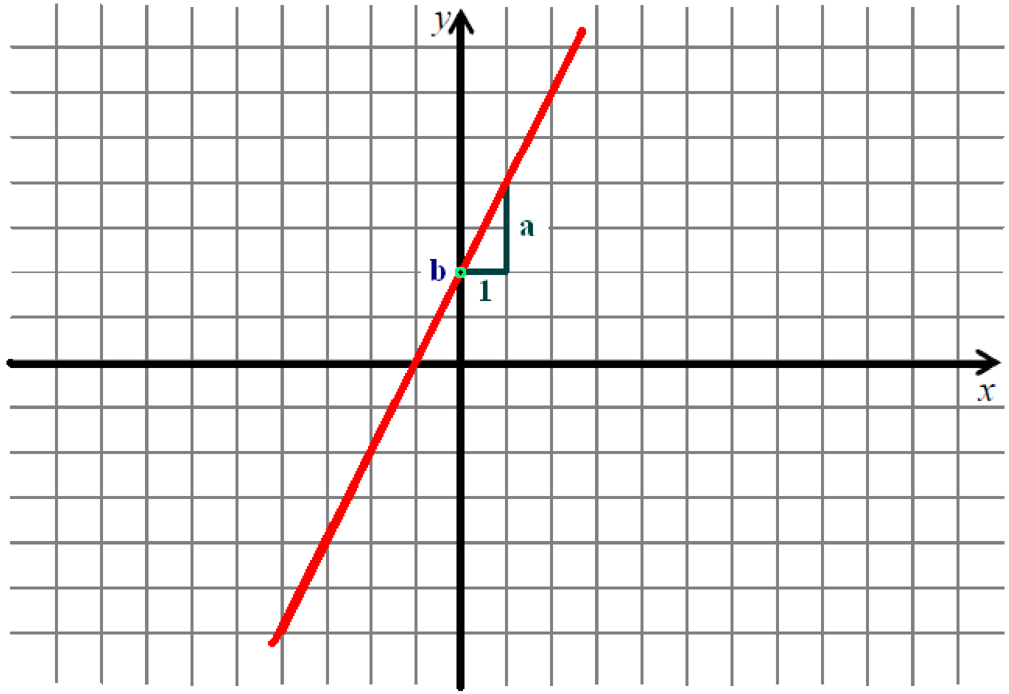
$$\frac{p}{q} > 0$$

b: y tengely metszéspont

p egység jobbra

q egység föl

$f(x) = a \cdot x + b$



Függvényvizsgálat:

***f*(x):** É.T.: $x \in \mathbf{R}$

É.K.: $y \in \mathbf{R}$

ZH: $x = -\frac{b}{a}$

szélső érték: min: -

max: -

szig monoton cs.: -

szig. monoton nő:] - ∞; ∞ [

folytonos

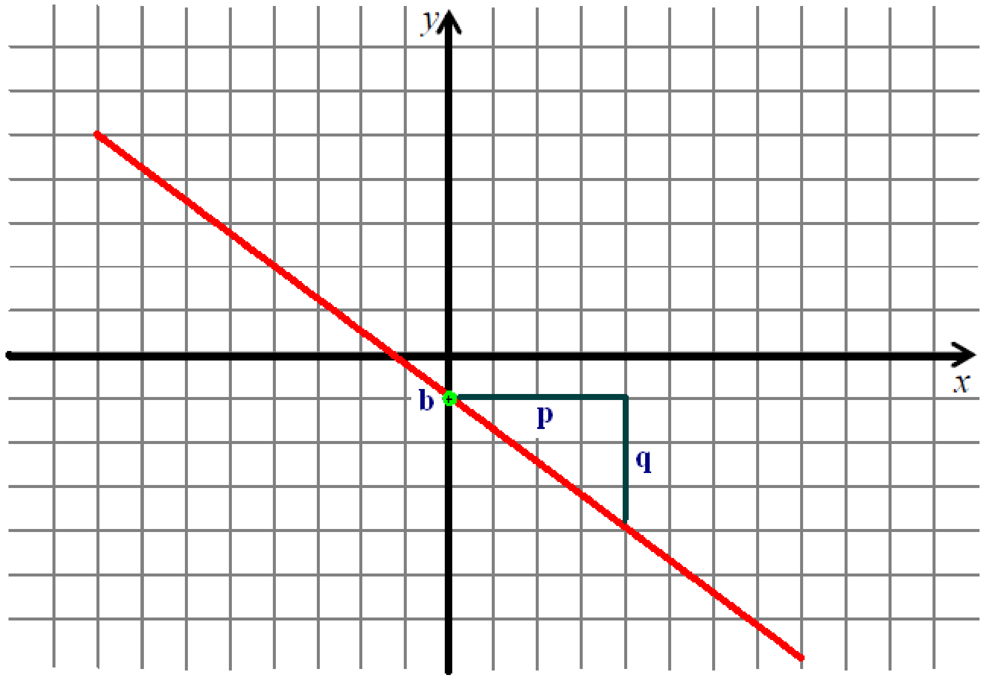
a > 0

b: y tengely metszéspont

1 egység jobbra

a egység föl

$$f(x) = -\frac{p}{q}x + b$$



Függvényvizsgálat:

***f*(x):** É.T.: $x \in \mathbf{R}$

É.K.: $y \in \mathbf{R}$

ZH: $x = \frac{b \cdot q}{p}$

szélső érték: min: -

max: -

szig monoton cs.: $]-\infty; \infty[$

szig. monoton nő: -

folytonos

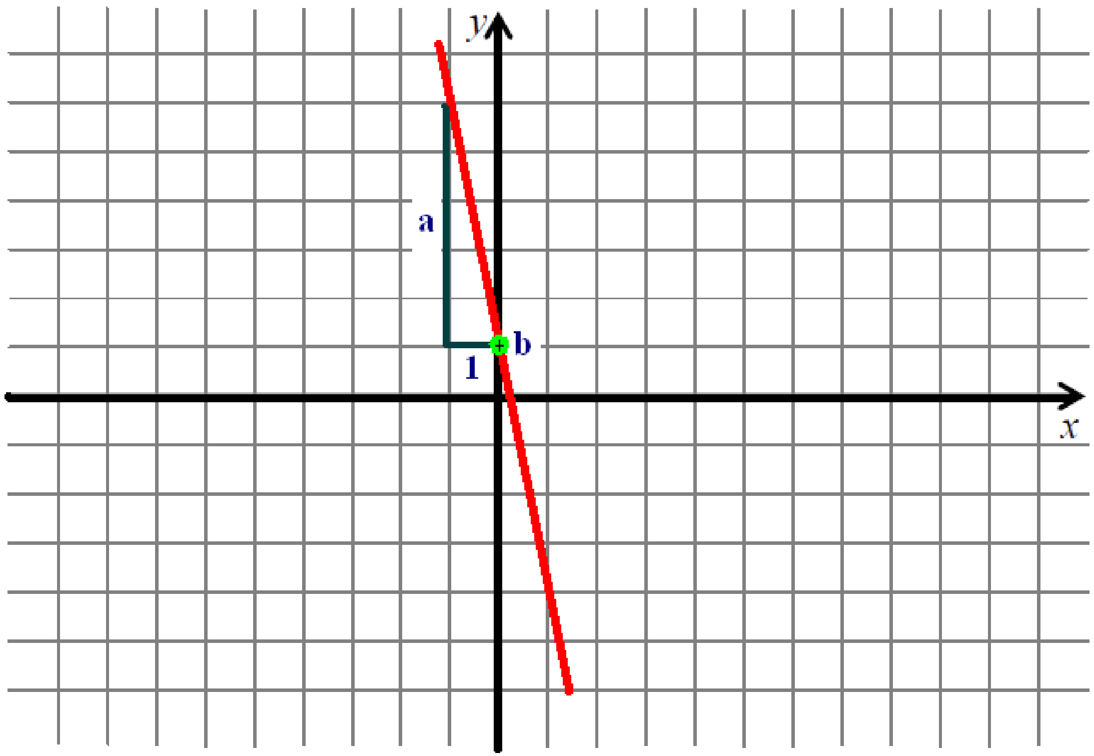
$$\frac{p}{q} < 0$$

b: y tengely metszéspont

p egység jobbra

q egység le

$f(x) = -a \cdot x + b$



Függvényvizsgálat:

$f(x)$: É.T.: $x \in R$

É.K.: $y \in R$

ZH: $x = \frac{b}{a}$

szélső érték: min: -

max: -

szig monoton cs.: $]-\infty; \infty[$

szig. monoton nő: -

folytonos

a < 0

b: y tengely metszéspont

1 egység jobbra

a egység le

Másodfokú függvény

Azokat a valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyek hozzárendelési szabálya

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in R$, $a \neq 0$) alakú, másodfokú függvényeknek nevezzük.

A másodfokú függvények grafikonja parabola.

Más alakban felírva:

$f(x) = a \cdot (x + b)^2 + c$ ($a, b, c \in R$, $a \neq 0$)

Az $f(x) = x^2$ függvény

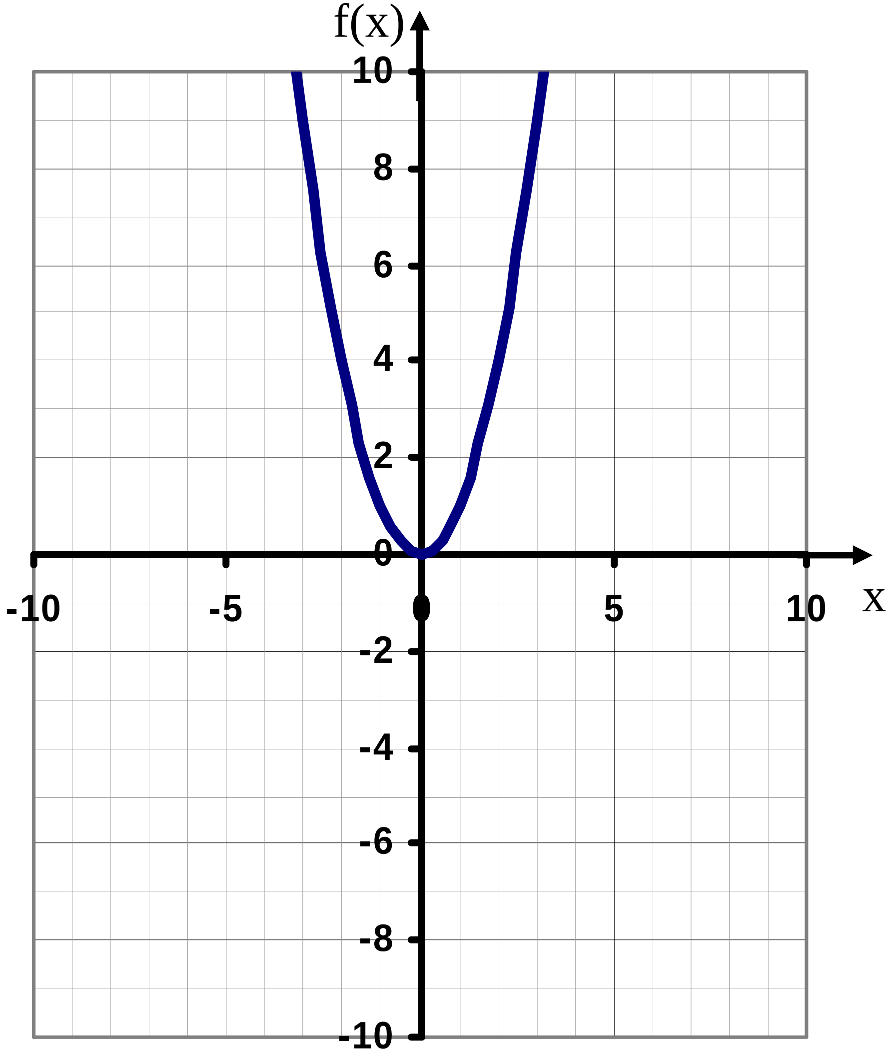
Rendeljük minden valós számhoz a négyzetét!

Ez a függvény **másodfokú függvény**.

A függvényt megadhatjuk a következő hozzárendeléssel:

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$

Az $f(x) = x^2$ függvény és jellemzése



ÉT: $x \in \mathbf{R}$

ÉK: $y \in \mathbf{R}$ és $y \geq 0$

ZH: $x = 0$

Szélsőérték

min.: hely: $x = 0$

érték: $y = 0$

max.: –

Szigorúan monoton

csökken: $]-\infty\ ;\ 0]$

nő: $[0\ ;\ \infty[$

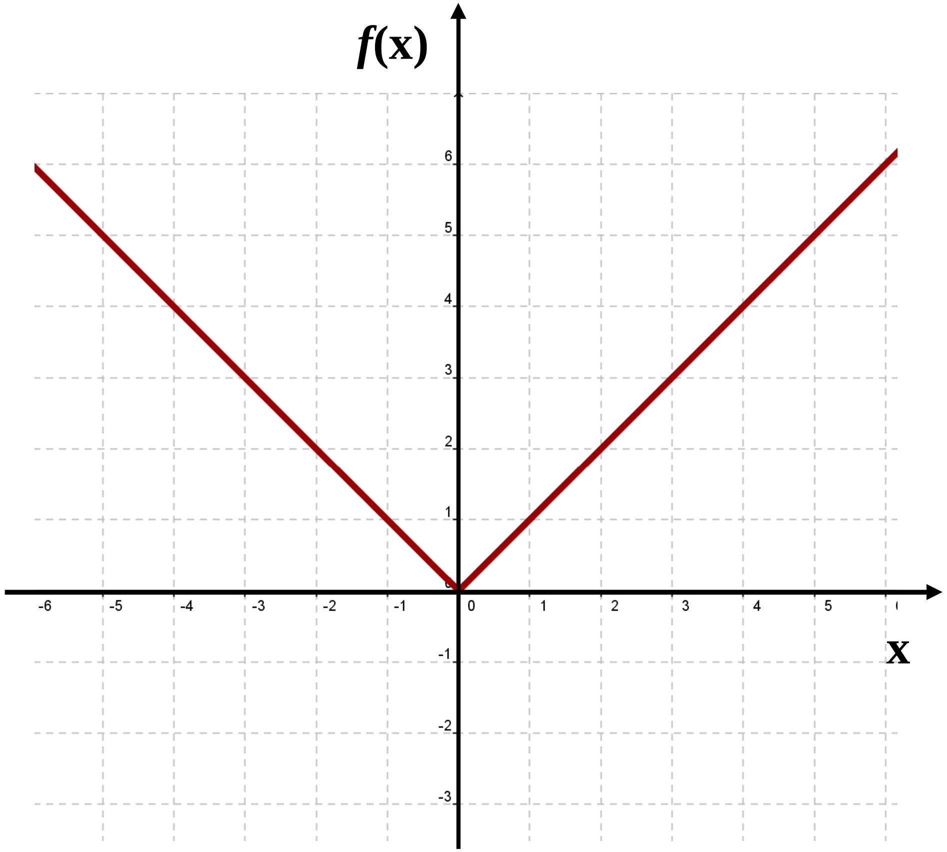
Paritás páros

Abszolútérték függvény

Azokat a valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyek hozzárendelési szabálya $f(x) = a \cdot |x + b| + c$ ($a, b, c \in R$, $a \neq 0$) alakú, abszolútérték függvényeknek nevezzük.

Az abszolútérték függvények grafikonja V alakú.

Az $f(x) = | x |$ függvény és jellemzése



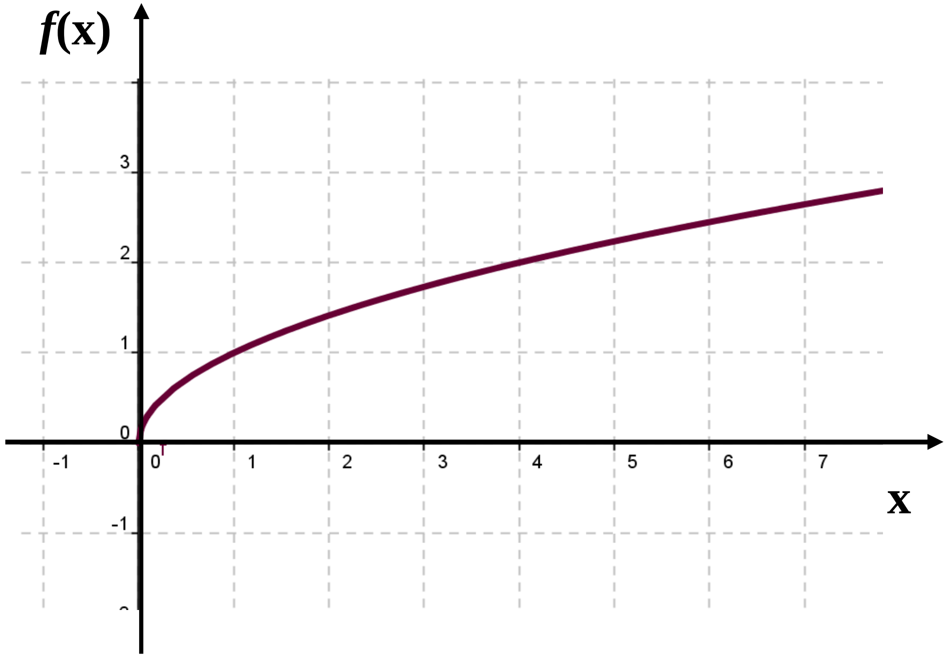
ÉT:	$x \in \mathbf{R}$
ÉK:	$y \in \mathbf{R}$ és $y \geq 0$
ZH:	$x = 0$
Szélsőérték	
min.:	hely: $x = 0$
	érték: $y = 0$
max.:	–
Szigorúan monoton	
csökken:	$]-\infty\,;\,0]$
nő:	$[0\,;\,\infty[$
Paritás	páros

Négyzetgyök függvény

Azokat a valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyek hozzárendelési szabálya $f(x) = a\sqrt{x+b}+c$ (a, b, c $\in$ R; a $\neq 0$; x $\geq$ 0) alakú, négyzetgyökfüggvényeknek nevezzük.

A négyzetgyökfüggvények grafikonja fél parabola.

Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény és jellemzése



ÉT: $x \in \mathbf{R}$ és $x \geq 0$

ÉK: $y \in \mathbf{R}$ és $y \geq 0$

ZH: $x = 0$

Szélsőérték

min.: hely: $x = 0$

érték: $y = 0$

max.: –

Szigorúan monoton

csökken: –

nő: $[0\,;\,\infty[$

Paritás –

Lineáris törtfüggvény

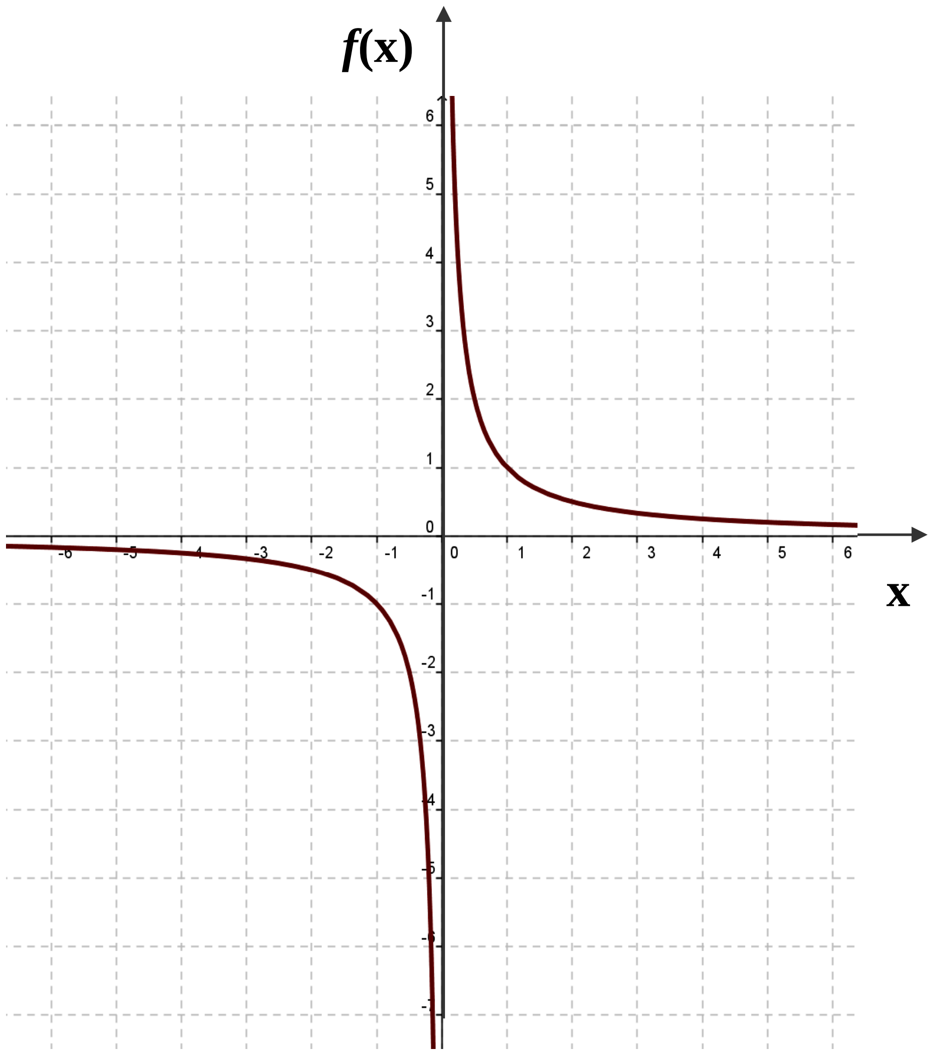
Azokat a valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyek hozzárendelési szabálya

$$f(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

(a, b, c $\in$ R; x $\neq$ 0) alakú, lineáris törtfüggvényeknek nevezzük.

A lineáris törtfüggvények grafikonja hiperbola.

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény és jellemzése



ÉT: $x \in \mathbf{R}$ és $x \neq 0$

ÉK: $y \in \mathbf{R}$ és $y \neq 0$

ZH: –

Szélsőérték

min.: –

max.: –

Szigorúan monoton

csökken: $]-\infty\, ;\, 0[$ és $]0\, ;\, \infty[$

nő: –

Paritás páratlan

x = 0-ban szakadása van

Egészrész függvény

Az x szám **egészrésze** az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb az x számnál.

Jele: [x]

Például:

$[0] = 0$

$[1] = 1$

$[-1] = -1$

$[-2] = -2$

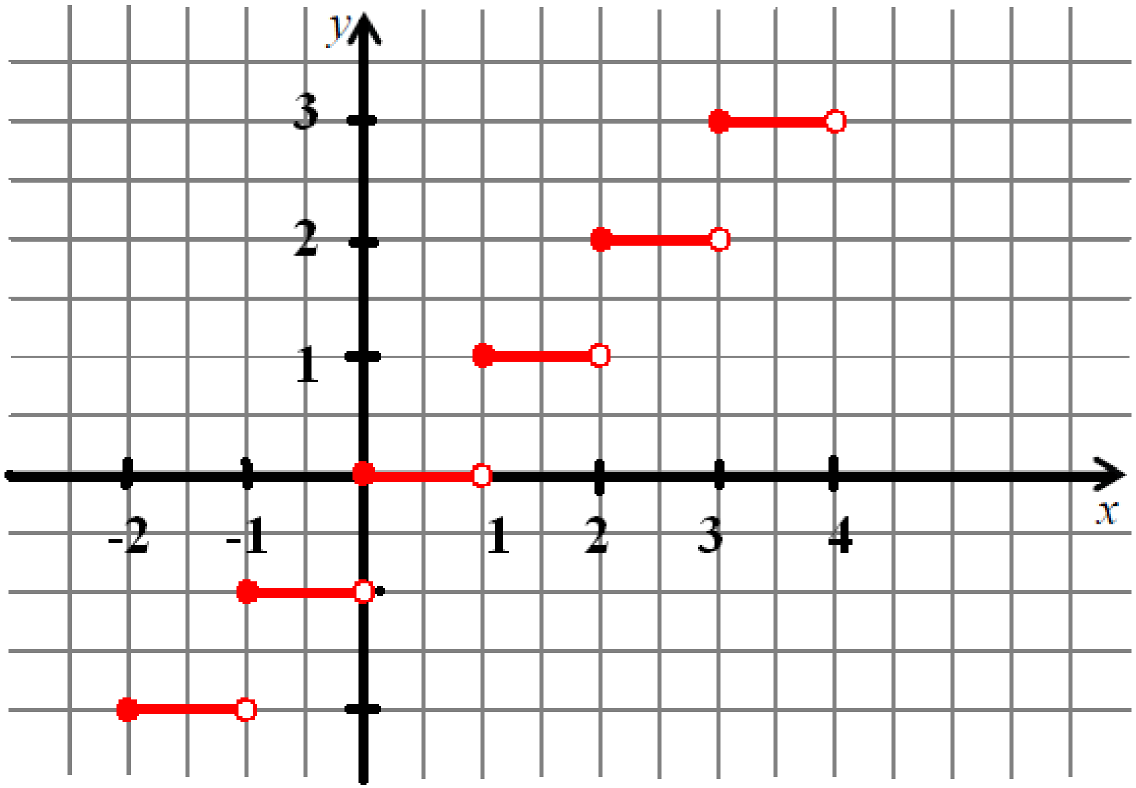
$\left[\frac{1}{3}\right] = 0$

$[1,2] = 1$

$[-0,9] = -1$

$[-1,11] = -2$

Az f(x) = [x] függvény



Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza

Értékkészlete: az egész számok halmaza

Törtrész függvény

Az x szám **törtrész**én az x – [x] számot értjük.

Jele: {x}

Például:

$\{0\} = 0 - [0] = 0$

$\{1\} = 1 - [1] = 0$

$\{-1\} = -1 - [-1] = 0$

$\{-2\} = -2 - [-2] = 0$

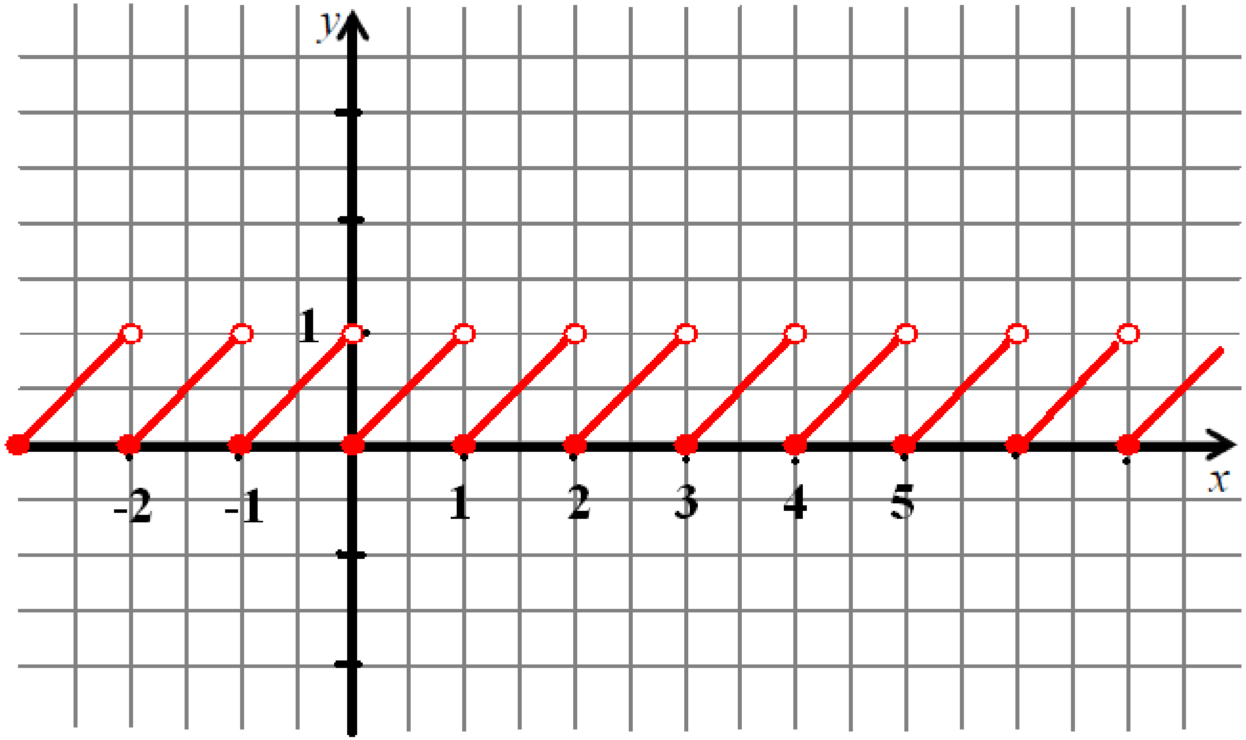
$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

$\{1,2\} = 1,2 - [1,2] = 0,2$

$\{-0,9\} = -0,9 - [-0,9] = 0,1$

$\{-1,11\} = -1,11 - [-1,11] = 0,89$

Az f(x) = {x} függvény



Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza

Értékkészlete: a valós számok halmaza és x ∊ [0 ; 1[

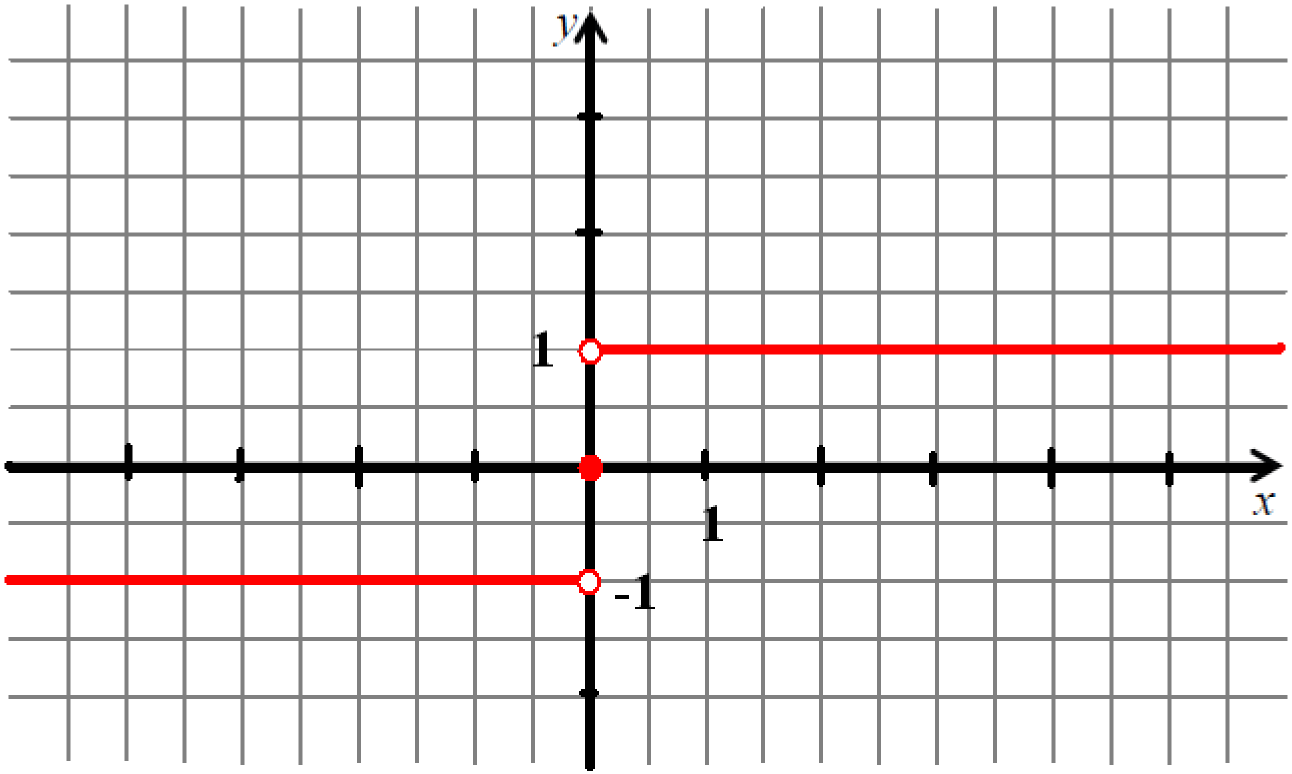
Előjel függvény

Előjelfüggvénynek vagy szignumfüggvénynek (sgn) nevezzük az

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

eljárással meghatározott függvényt.

Az f(x) = sgn(x) függvény



Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza

Értékkészlete: {-1; 0; 1}