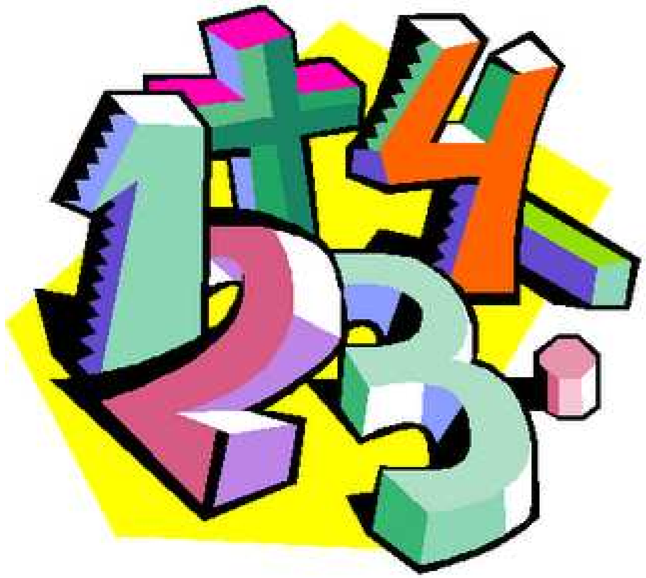
Számelmélet



Oszthatóság

Legyenek **a** és **b** természetes számok.

Azt mondjuk, hogy az **a** szám osztója **b** számnak, ha létezik olyan **c** természetes szám, melyre teljesül, hogy

$$b = a \cdot c$$

Úgy is mondhatjuk, hogy b **többszöröse** a-nak.

Jelölés: $a \mid b$

Ha az **a** és **b** természetes számokhoz nincs olyan természetes szám, melyre $b = a \cdot c$, akkor **a nem osztója b**-nek.

Jelölés: $a \nmid b$

Példák:

$\mathbf{6 \mid 24}$,

mert létezik olyan természetes szám, a 4, melyre $24 = 6 \cdot 4$

$\mathbf{13 \mid 39}$,

mert létezik olyan természetes szám, a 3, melyre $39 = 13 \cdot 3$

$\mathbf{12 \nmid 45}$,

mert nincs olyan természetes szám, melyet 12-vel szorozva 45-öt kapunk.

Az egyet és magát a számot a kérdéses szám **nem valódi osztói**nak mondjuk.

Az egytől és magától a számtól különböző osztókat a szám **valódi osztójá**nak nevezzük.

24-nek a

nem valódi osztói: *1; 24*.

valódi osztói: *2; 3; 4; 6; 8; 12*.

$a; b; c \in \mathbf{N}$

- Bármely természetes szám önmagának osztója, vagyis $\mathbf{a \mid a}$.
- Ha $\mathbf{a \mid b}$ és $\mathbf{b \mid a}$, akkor $\mathbf{a = b}$.
- Ha $\mathbf{a \mid b}$, akkor tetszőleges $\mathbf{c}$-re $\mathbf{a \mid b \cdot c}$.
- Ha $\mathbf{a \mid b}$ és $\mathbf{b \mid c}$, akkor $\mathbf{a \mid c}$.
- Ha $\mathbf{a \mid b}$ és $\mathbf{a \mid c}$, akkor $\mathbf{a \mid b \pm c}$.

  (Ha a osztója két természetes számnak, akkor e két szám összegének és különbségének is osztója.)
- Ha $\mathbf{a \mid b + c}$ és $\mathbf{a \mid b}$, akkor $\mathbf{a \mid c}$.
- $\mathbf{a \mid 0}$

  (Bármely természetes szám osztója a 0-nak.)

Oszthatósági szabályok

Egy természetes szám akkor és csakis akkor osztható

2-vel,	ha páros (utolsó számjegye: 0; 2; 4; 6; 8).
3-mal,	ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.
4-gyel,	ha az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel.
5-tel,	ha a szám 0-ra, vagy 5-re végződik.
6-tal,	ha az osztható 2-vel is és 3-mal is.
8-cal,	ha az utolsó három számjegyből álló szám osztható 8-cal.
9-cel,	ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.
10-zel,	ha a szám 0-ra végződik.
12-vel,	ha az osztható 3-mal is és 4-gyel is.

Prímszámok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eratoszthenész szitája

Prímszámnak nevezzük azokat a természetes számokat, melyeknek pontosan két osztójuk van: 1 és önmaguk.

Az egy nem prímszám.

Végtelen sok prímszám van.

Prímszámok 1000-ig

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

Összetett számok

SZAT

Azokat a számokat, melyeknek 2-nél több osztójuk van, **összetett számok**nak nevezzük.

Számelmélet alaptétele

Bármely összetett szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára.

Bontsuk fel a 1120-at prímtényezők szorzatára!

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Legnagyobb közös osztó

$(a;b)=$

Két vagy több szám közös osztói közül a legnagyobbat

legnagyobb közös osztónak nevezzük.

Jelölés:

(a ; b) =

Határozzuk meg 18 és 24 legnagyobb közös osztóját!

18 osztói: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

közös osztók

24 osztói: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

6 a legnagyobb közös osztó

Sokszor eléggé sokáig tart meghatározni több szám összes osztóját, és kiválasztani a közösen előfordulók közül a legnagyobbat, ezért:

Két vagy több szám legnagyobb közös osztóját úgy határozzuk meg, hogy a számokat prímtényezőkre bontjuk, majd a felbontásban szereplő közös prímeket az előforduló legkisebb hatványkitevőn összeszorozzuk.

Határozzuk meg 18 és 24 legnagyobb közös osztóját!

$18 = 2 \cdot 3^2$

$24 = 2^3 \cdot 3$.

$\mathbf{(18\ ;\ 24)} = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$

Ha a, b számokra (a , b) = 1,
akkor a-t és b-t **relatív prímek**nek mondjuk.

Példák

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$$(504\ ;\ 540) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Példák

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad$ $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$$(360\,;\,756) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Legkisebb közös többszörös

$[a;b]=$

Két vagy több szám közös többszörösei közül a legkisebbet **legkisebb közös többszörös**nek nevezzük.

Jelölés:

[a ; b] =

Határozzuk meg 18 és 24 legkisebb közös többszörösét!

18 többszörösei: 18; 36; 54; 72; 90; 108, 126, 144.

közös többszörösök

24 többszörösei: 24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192.

72 a legkisebb közös többszörös

Sokszor eléggé sokáig tart meghatározni több szám összes osztóját, és kiválasztani a közösen előfordulók közül a legnagyobbat, ezért:

Két vagy több szám legkisebb közös többszörösét úgy határozzuk meg, hogy a számokat prímtényezőkre bontjuk, majd a felbontásban szereplő közös prímeket az előforduló legnagyobb hatványkitevőn összeszorozzuk.

Határozzuk meg 18 és 24 legnagyobb közös osztóját!

$18 = 2 \cdot 3^2$

$24 = 2^3 \cdot 3$.

$\mathbf{[18\ ;\ 24]} = 2^3 \cdot 3^2 = \mathbf{72}$

Példák

$$\begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ $\qquad$ $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$$[504 ; 540] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$$

Példák

$$
\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
756 & 2 \\
378 & 2 \\
189 & 3 \\
63 & 3 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad$ $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$$[504 ; 540] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$$