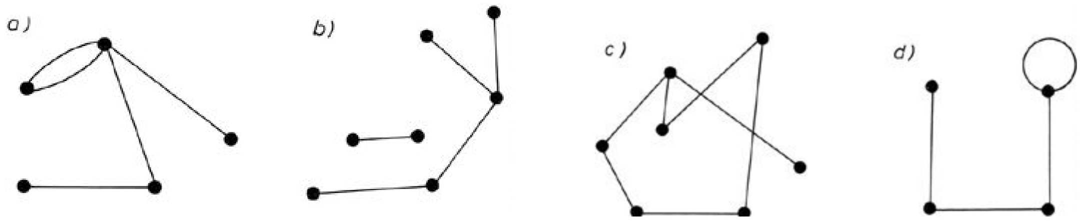
GRÁFOK

Gráfnak nevezzük pontoknak és éleknek a **halmazát**, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik.

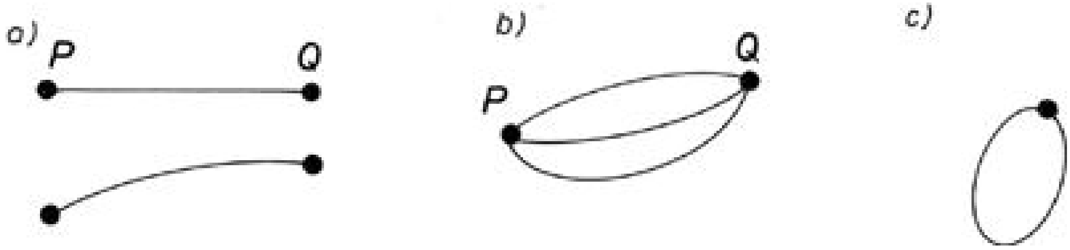


A **gráfok** pontjait egyszerűen pontoknak nevezzük, de használatos a **csúcspont** (**csúcs**), szögpont elnevezés is.

a, Ha egy **élre** két pont illeszkedik, akkor azt mondjuk, hogy az az **él** két pontot köt össze. Azt is mondjuk, hogy a *P, Q* pontok az *e* **él végpontjai**.

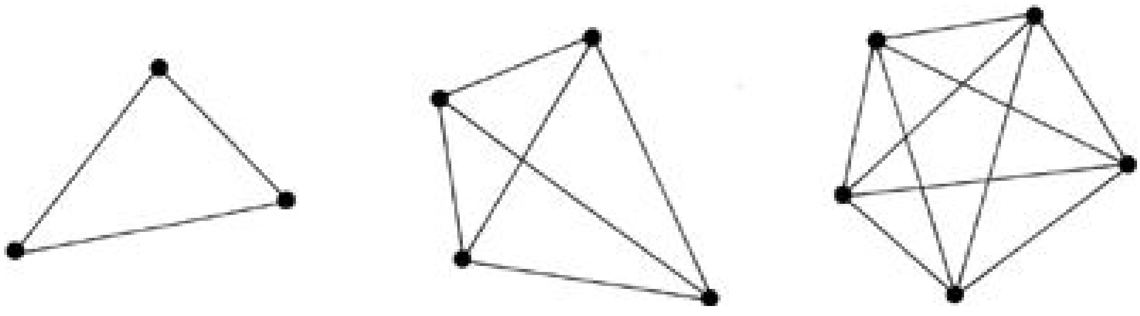
b, Megtörténhet, hogy ugyanazt a *P, Q* pontot két vagy több **él** köti össze, akkor ezeket **párhuzamos** (vagy többszörös) **éleknek** nevezzük.

c, Ha egy élre egy pont illeszkedik, azaz egy **él végpontja** azonos, akkor azt az **élt hurokélnek** nevezzük.



Ha egy **gráfban** nincsenek **párhuzamos élek** és nincs **hurokél**, akkor azt **egyszerű gráfnak** nevezzük.

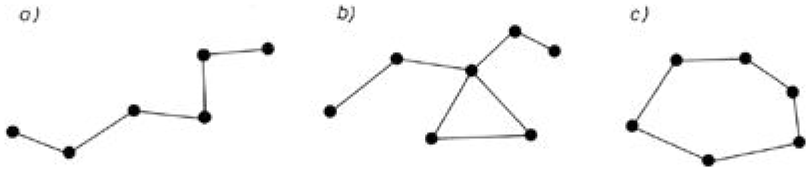
Ha egy **gráfnak** mindegyik pontjából pontosan egy-egy **él** vezet a **gráf** összes többi pontjához, akkor azt **teljes gráfnak** nevezzük.



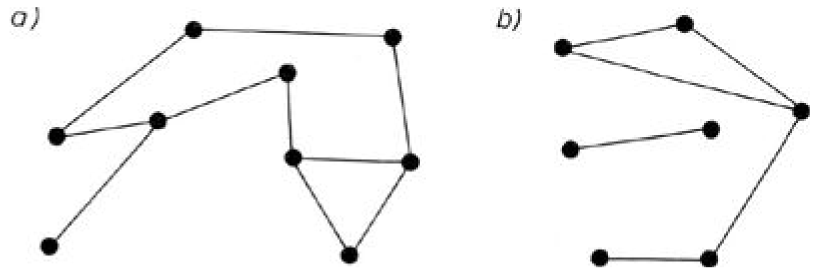
a, **Útnak** nevezzük a **gráf** egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

b, **Vonalnak** nevezzük a **gráf** egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorát, amelyben egyetlen él sem szerepel egynél többször.

c, **Körnek** nevezzük a kezdőpontjába visszavezető utat, azaz olyan élsorozatot, amely kezdőpontjába tér vissza, és benne minden pont és minden él csak egyszer szerepel.



Összefüggőnek nevezünk egy **gráfot**, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

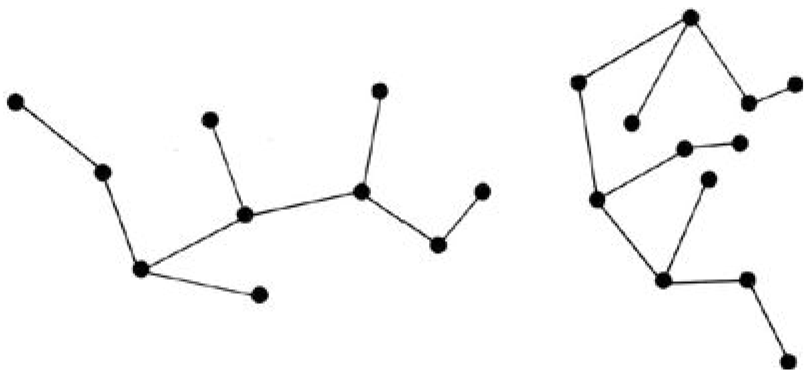


Ha egy **gráf** összefüggő, és nem tartalmaz kört, akkor azt fának nevezzük.

A fák bármely két pontját egyetlen út köti össze.

Egy fának bármely élét elhagyva már nem lenne összefüggő ***gráf****.*

Ha egy fának bármely két olyan pontját összekötnénk, amely eddig nem volt összekötve, akkor a ***gráfban*** *már lenne kör*

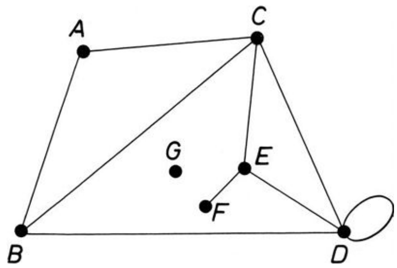


Tétel: Minden többpontú fának (azaz minden olyannak, amely legalább kétpontú) van elsőfokú pontja.

Tétel: Az n pontú fának $n-1$ éle van.

A **gráf** egy pontjába összefutó **élek** számát a pont **fokszámának** (röviden fokának) nevezzük.

Az ábrán az *A* pont **fokszáma** 2, a *B* ponté 3, a *C* ponté 4, a *D* ponté 5, az *E* ponté 3, az *F* ponté 1, a *G* ponté 0.



Már ezekből az **alapfogalmakból** következik, hogy egy **gráfnál** az **élek** száma és a pontok **fokszámának** összege között összefüggés van. Ha összeszámoljuk a **gráf** minden pontjánál a **fokszámokat**, akkor minden élt mindkét végpontjánál figyelembe vettünk. Mivel a pontok **fokszámát** az ott összefutó élek száma határozza meg, fennáll a következő állítás:

Tétel: Bármely **gráfban** a **fokszámok** összege az **élek** számának kétszerese.

Tétel: Teljes gráfban az élek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$ *(mindig egész szám!)*

Természetes, hogy olyan **gráf** is van, amelynek valamelyik pontjánál a **fokszám** páratlan. Az előző tétel szerint a *fokszámok összege* páros szám, így következik belőle az alábbi állítás:

Tétel: Bármely **gráfban** a páratlan **fokszámú** pontok száma páros.

A vonalak közül nagyon fontos az, amelynek a kezdő- és **végpontja** azonos, és amelyben a **gráf** minden éle szerepel. Az ilyen vonalat ***Euler-vonalnak*** nevezzük. Ha egy **gráfnak** van **Euler-vonala**, az azt jelenti, hogy a **gráf** egyik pontjából kiindulva a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatjuk a **gráfot** úgy, hogy ceruzánkkal minden élen pontosan egyszer haladunk át, és visszatérünk a kiindulópontba. Most a „**königsbergi séta**" problémáját megfogalmazhatjuk így is: „Van-e az *ábra* **gráfjának Euler-vonala**?"

Tétel: Egy összefüggő **gráfnak** akkor és csak akkor van **Euler-vonala**, ha a **gráf** minden pontjának a **fokszáma** páros szám.

A „**königsbergi séta**" **gráfjánál** a **fokszámok** páratlan számok. Emiatt a **gráfnak** nincs **Euler-vonala**.