$\log_a$ritmus

Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám.

Tetszőleges b pozitív valós szám esetén létezik

pontosan egy olyan c valós szám, hogy $b = a^c$.

Ekkor a c hatványkitevőt a b szám a alapú

logaritmusának nevezzük.

Jelölés:

$$\log_a b = c$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 1; \quad a > 0; \quad b > 0$$

Olvasd: a alapú logaritmus b egyenlő c

Következmény:

$\log_a 1 = 0,$ mert $a^0 = 1$ $(a > 0, a \neq 1)$

$\log_a a = 1,$ mert $a^1 = a$

$a^{\log_a b} = b$

$\log_a a^x = x$

Példák:

$\log_3 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$	$\log_5 1 = 0$
$\log_3 3 = 1$	$\log_3 3 = 1$	$\log_5 5 = 1$
$\log_3 9 = 2$	$\log_3 9 = 2$	$\log_5 25 = 2$
$\log_3 27 = 3$	$\log_3 27 = 3$	$\log_5 125 = 3$
$\log_3 81 = 4$	$\log_3 81 = 4$	$\log_5 625 = 4$
$\log_3 243 = 5$	$\log_3 243 = 5$	$\log_5 3125 = 5$

Példák:

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}$$ $$\log_8 2 = \frac{1}{3}$$ $$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$$

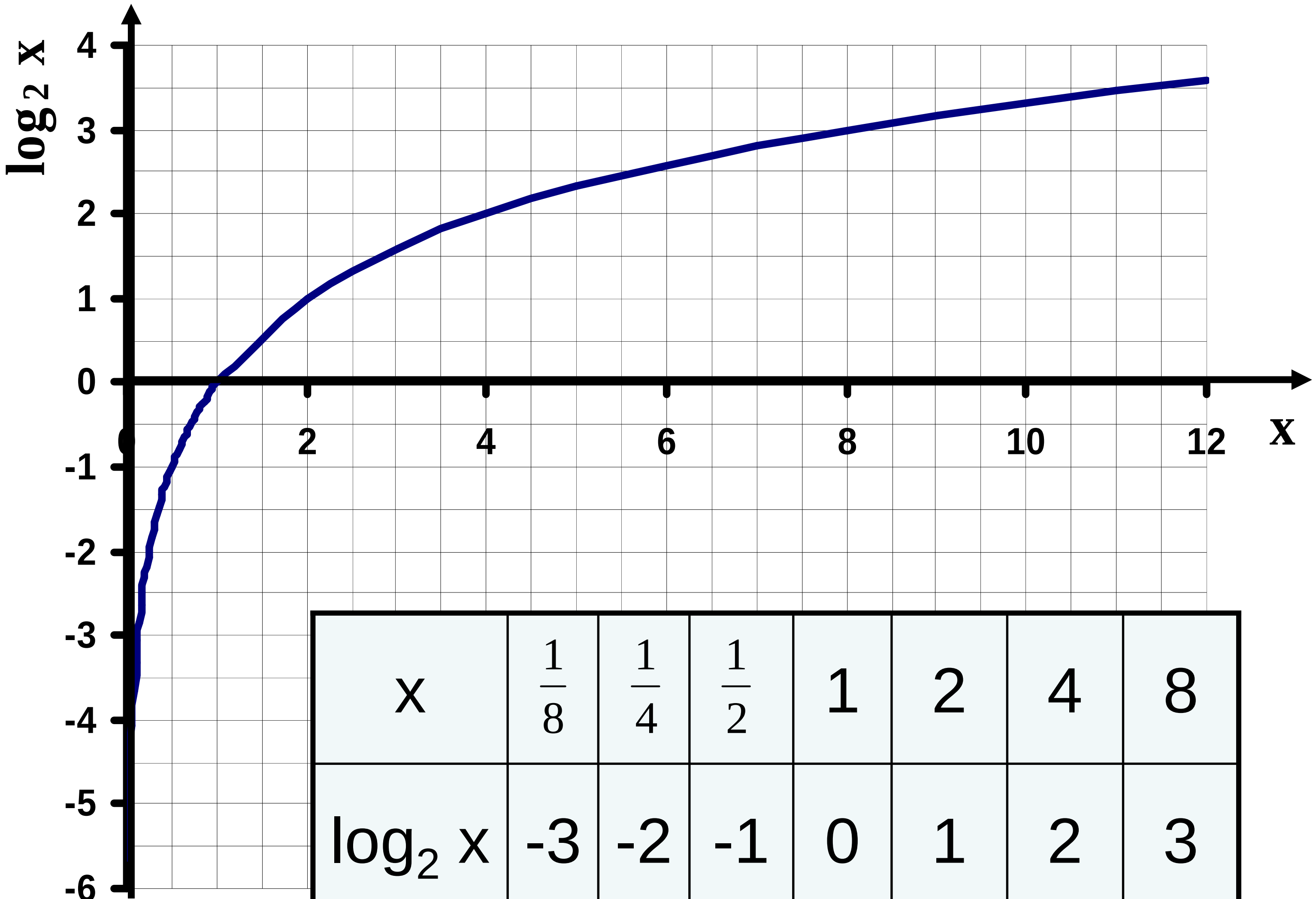
$$\log_9 3 = \frac{1}{2}$$ $$\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$$ $$\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$$

$$\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$$ $$\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$$ $$\log_{256} 4 = \frac{1}{4}$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$$ $$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$ $$\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$$

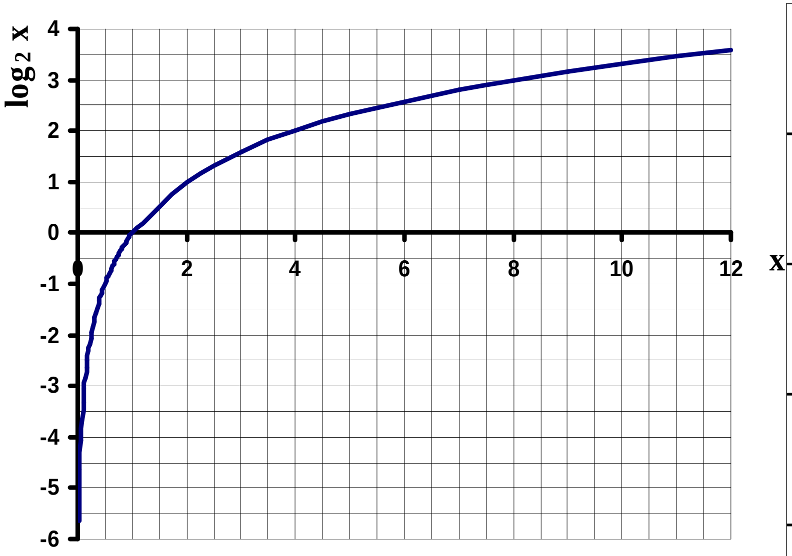
$$\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$$ $$\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$$ $$\log_{1296} 6 = \frac{1}{4}$$

A $\log_2 x$ függvény



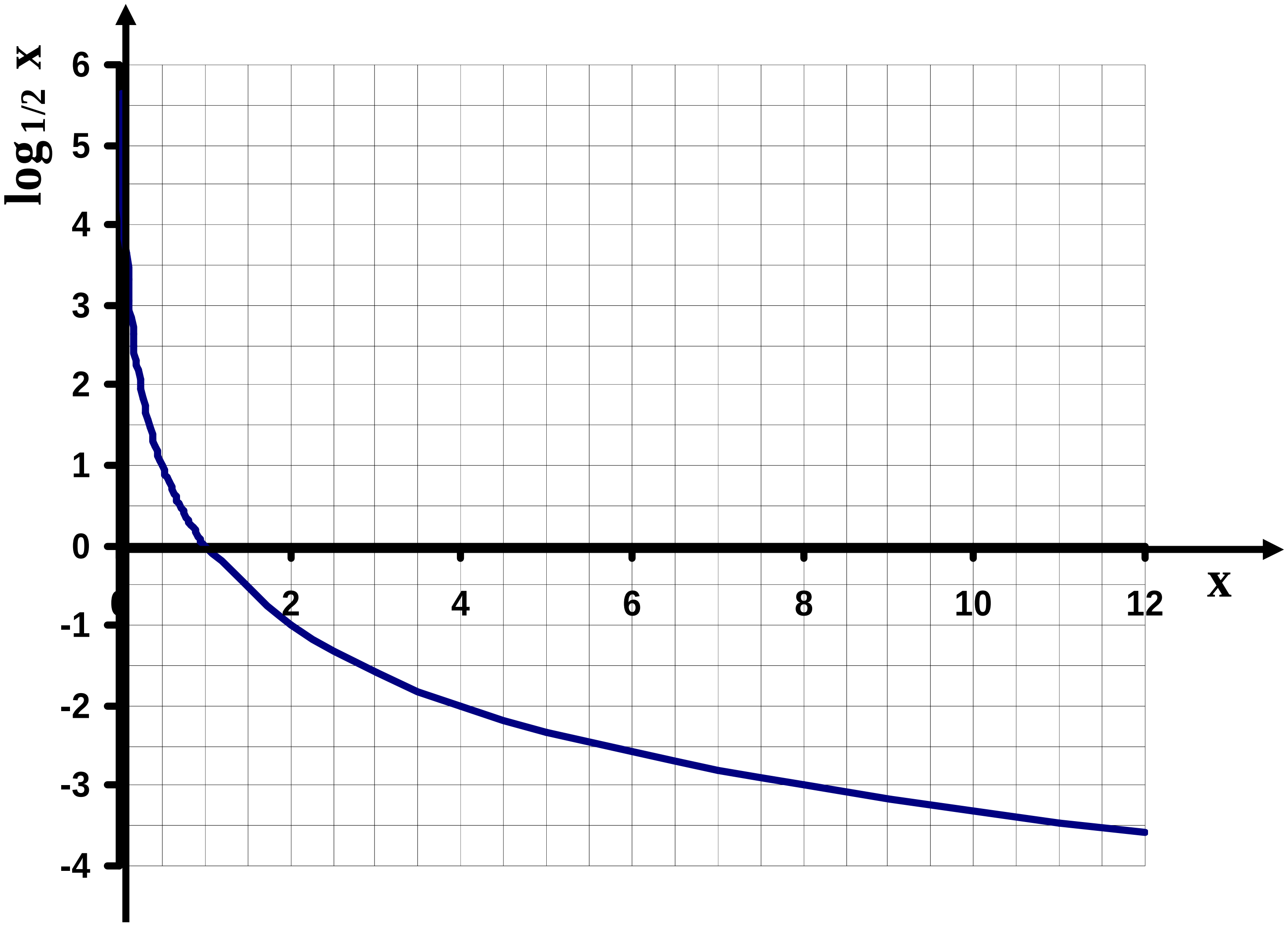
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

A $\log_2 x$ függvény vizsgálata

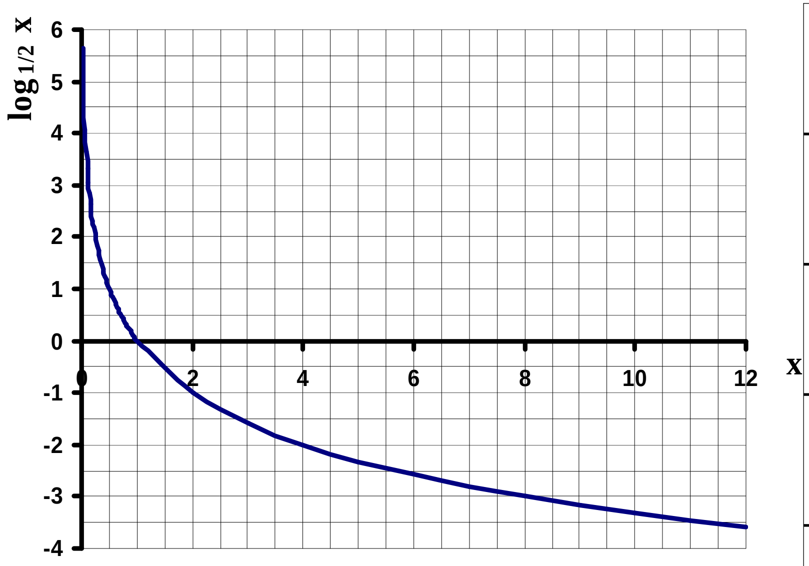


É.T.	$x \in R^+$
É.K.	$y \in R$
ZH	$X = 1$
Szig. mon. cs.	—
Szig. mon. nő	$]0; \infty[$
Minimum	—
Maximum	—

A $\log_{1/2} x$ függvény



A $\log_{1/2}$ x függvény vizsgálata



É.T.	$x \in R^+$
É.K.	$y \in R$
ZH	X = 1
Szig. mon. cs.	]0; ∞[
Szig. mon. nő	—
Minimum	—
Maximum	—

A logaritmus azonosságai

Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével.

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

ahol $a, x, y \in \mathbf{R}$; $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$

Példák:

$$\log_6 12 + \log_6 18 = \log_6 (12 \cdot 18) = \log_6 216 = 3$$

$$\log_4 8 + \log_4 32 = \log_4 (8 \cdot 32) = \log_4 256 = 4$$

$$\log_{12} 16 + \log_{12} 9 = \log_{12} (16 \cdot 9) = \log_{12} 144 = 2$$

Tört logaritmusa egyenlő a számláló és a nevező logaritmusának különbségével.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ahol $a, x, y \in \mathbf{R}$; $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$

Példák:

$$\log_3 756 - \log_3 28 = \log_3 \frac{756}{28} = \log_3 27 = 3$$

$$\log_5 750 - \log_5 30 = \log_5 \frac{750}{30} = \log_5 25 = 2$$

$$\log_2 672 - \log_2 21 = \log_2 \frac{672}{21} = \log_2 32 = 5$$

Hatvány logaritmusa egyenlő a kitevőnek és a hatványalap logaritmusának a szorzatával.

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

ahol $a, x, y \in \mathbf{R}$; $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$

Példák:

$$3 \cdot \log_6 6 = \log_6 6^3 = \log_6 216 = 3$$

$$4 \log_4 2 = \log_4 2^4 = \log_4 16 = 2$$

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4 \cdot \log_5 5 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9 \cdot \log_2 2 = 9 \cdot 1 = 9$$

Következmény:

$$\boxed{\log_a \sqrt[y]{x}} = \log_a x^{\frac{1}{y}} = \boxed{\frac{1}{y} \cdot \log_a x}$$

ahol a, x, y ∈ **R**; a > 0, a ≠ 1, x > 0, y > 0

Átírás más alapú logaritmusba:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ahol a, b, c $\in$ **R**; a, b, c > 0, a $\neq$ 1, c $\neq$ 1

Következmény:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

ahol a, b$\in$ **R**; a, b > 0, a $\neq$ 1, b $\neq$ 1

Vegyes feladatok:

$$\log_5 150+\log_5 30-\log_5 36=\log_6 \frac{150\cdot 30}{36}=\log_5 125=3$$

$$\log_2 80-\log_2 60+\log_2 96=\log_2 \frac{80\cdot 96}{60}=\log_2 128=7$$

$$\log_7 1470-\log_7 14-\log_7 15=\log_7 \frac{1470}{14\cdot 15}=\log_7 7=1$$

$$\log_6 720+\log_6 180-\log_6 100=\log_6 \frac{720\cdot 180}{100}=\log_6 1296=4$$

Vegyes feladatok:

$$\log_4 176 - \log_4 22 + \log_4 112 - \log_4 14 = \log_4 \frac{176 \cdot 112}{22 \cdot 14} = \log_4 64 = 3$$

$$\log_3 810 + \log_3 126 - \log_3 14 - \log_3 30 = \log_3 \frac{810 \cdot 126}{14 \cdot 30} = \log_3 243 = 5$$

$$\log_7 20160 - \log_7 30 - \log_7 8 - \log_7 12 = \log_7 \frac{20160}{30 \cdot 8 \cdot 12} = \log_7 7 = 1$$

Vegyes feladatok:

$$2 \cdot \log_3 9 + \log_3 7 - \log_3 21 = \log_3 \frac{9^2 \cdot 7}{21} = \log_3 \frac{567}{21} = \log_3 27 = 3$$

$$\frac{1}{3}\log_2 8 - \log_2 2 = \log_2 \frac{\sqrt[3]{8}}{2} = \log_2 \frac{2}{2} = \log_2 1 = 0$$

$$2 \cdot \log_7 14 - \log_7 12 + \frac{1}{3} \cdot \log_7 9261 = \log_7 \frac{196 \cdot \sqrt[3]{9261}}{12} =$$

$$= \log_7 \frac{196 \cdot 21}{12} = \log_7 343 = 3$$